

## Lagrangien métrique géodésique en relativité

Ce sujet est proposé à titre d'exercice, par exemple dans le cours de Luc Blanchet :

<https://www2.iap.fr/users/blanchet/images/coursRG.pdf>

Chapitre 5- paragraphe D, commençant p.36 dont quelques extraits (entre les barres d'étoiles) sont donnés ci-après.

En relativité, on rappelle que la métrique s'écrit :  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

\*\*\*\*\*

Rappel de la définition des symboles de Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} [\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}] \quad (5.19)$$

Nous verrons que l'utilisation des équations de Lagrange avec le lagrangien « géodésique » permet de déterminer l'équation géodésique sans utiliser *a priori* les symboles de Christoffel. Ils vont apparaître naturellement dans le calcul. Considérons l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dp} \left( \frac{\partial L}{\partial(dx^\mu/dp)} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \quad (5.21)$$

où  $L$  est ce qu'on appelle le *lagrangien géodésique* donné par

$$L \left( x, \frac{dx}{dp} \right) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} = \frac{1}{2} \left( \frac{ds}{dp} \right)^2 \quad (5.22)$$

Comme on a pu réécrire  $L$  à l'aide de l'intervalle, on voit que les trajectoires solutions de l'équation des géodésiques sont bien les lignes géodésiques de l'espace-temps, c'est-à-dire les lignes extrémalisant la distance carrée entre les événements au sens de l'intervalle  $ds^2$ . On peut en fait montrer que les géodésiques extrémalisent aussi la distance  $ds = \sqrt{\pm ds^2}$ .

\*\*\*\*\*

Développons l'équation de Lagrange (5.21) avec le lagrangien (5.22).

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{d}{dp} (g_{\mu\nu}) \frac{dx^\nu}{dp} + \frac{d}{dp} (g_{\mu\nu}) \frac{dx^\mu}{dp} + g_{\mu\nu} \left( \frac{d^2 x^\mu}{dp^2} + \frac{d^2 x^\nu}{dp^2} \right) - \partial_\lambda g_{\mu\nu} \left( \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right) \right] = 0 \quad (5.23)$$

Dans la suite nous utiliserons les propriétés suivantes : La métrique est **symétrique** par rapport à ses indices  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ , et **un indice de sommation peut être renommé**, puisque c'est un paramètre intermédiaire qui disparaît à la fin. Ainsi, en utilisant ces propriétés, cela donne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} (g_{\mu\nu}) &= \partial_\nu g_{\mu\lambda} \frac{dx^\nu}{dp} \\ \frac{d}{dp} (g_{\mu\nu}) &= \partial_\mu g_{\nu\lambda} \frac{dx^\mu}{dp} \end{aligned}$$

En insérant dans l'équation (5.23) et, sans modifier l'équation elle peut s'écrire :

$$\frac{1}{2} [g_{\mu\nu} \left( \frac{d^2 x^\mu}{dp} + \frac{d^2 x^\nu}{dp} \right) + \left( \partial_\nu g_{\mu\lambda} \frac{dx^\nu}{dp} \frac{dx^\mu}{dp} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right) - \partial_\lambda g_{\mu\nu} \left( \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right)] = 0$$

Montrons que cette expression est équivalente à l'équation géodésique (5.24), où  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  est le symbole de Christoffel, qui s'écrit :

$$\frac{d^2 x^\rho}{dp} + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} [\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}] \left( \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right) = \frac{d^2 x^\rho}{dp} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \left( \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right) = 0 \quad (5.24)$$

Il ne reste plus qu'à multiplier par la métrique inverse et effectuer pour faire disparaître la métrique, en facteur avec les dérivées secondes.

$$g^{\rho\lambda} [g_{\rho\sigma} \left( \frac{d^2 x^\rho}{dp} \right) + \frac{1}{2} [(\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\nu\lambda}) - (\partial_\lambda g_{\mu\nu})] \left( \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right)] = 0$$

$$\delta_\sigma^\lambda \left( \frac{d^2 x^\rho}{dp} \right) + \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} [(\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\nu\lambda}) - (\partial_\lambda g_{\mu\nu})] \left( \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right) = 0$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\left( \frac{d^2 x^\rho}{dp} \right) + \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} [(\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\lambda\nu}) - (\partial_\lambda g_{\mu\nu})] \left( \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right) = \frac{d^2 x^\rho}{dp} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \left( \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right) = 0$$

Pour  $\lambda = \sigma$ , l'équation ci-dessous est bien l'équation géodésique (5.24). Comme  $\sigma$  n'est pas utilisé dans l'équation, on peut le poser égal à  $\lambda$  sans que cela soit une contrainte dans l'équation.

Par ailleurs cela introduit directement l'équation de la dérivée covariante avec le symbole de Christoffel.