

**Ce document est un extrait de la thèse « Painlevé et la relativité générale »  
soutenue par Jacques FRIC dont on trouvera le texte intégral en  
<https://theses.fr/2013PA070080>**

Elle peut faire référence à des éléments qui ont été utilisés dans d'autres chapitres de  
cette thèse

## **18- Une approche hamiltonienne non covariante : le formalisme ADM**

-----

Cette approche hamiltonienne (non covariante) développée pour permettre une quantification de la gravitation par la méthode utilisée en mécanique quantique est aussi utilisée quand il n'y a pas de solution analytique exacte, ce qui n'est pourtant pas le cas ici, pour trouver une solution (numérique) à un problème de relativité générale. Elle va se révéler très utile à la compréhension de la solution particulière que nous étudions dans la forme de Painlevé. Après avoir rappelé les concepts géométriques sur lesquels cette méthode s'appuie (courbure extrinsèque) nous montrerons que le feuilletage selon, la méthode, dans la forme de Painlevé conduit à des calculs particulièrement simples.

-----

### ***Introduction***

Dans cette approche, le “vecteur d'entraînement” va également jouer un rôle essentiel comme dans le modèle de la rivière.<sup>1</sup>

Dans cette approche<sup>2</sup>, pour résoudre (numériquement) l'équation d'Einstein (en fait le système de dix équations non linéaires aux dérivées partielles du second ordre) dans le cas où une solution analytique directe n'est pas possible<sup>3</sup>, on procède à un feuilletage de l'espace-temps en hypersurfaces de type espace, la variable dynamique étant alors associée à la coordonnée temporelle.

Cela brise la covariance de la théorie où aucune coordonnée<sup>4</sup> ne joue un rôle privilégié, puisque dans ce cas la structure qu'on construit est de type  $3D+1D$  au lieu de  $4D$ .

La méthode, développée formellement par les auteurs, garantit que, sous réserve de respecter certaines conditions discutées en détail dans le document, la méthode donne le résultat qu'une approche covariante aurait donné..

Dans l'annexe 9, nous indiquons le principe général de la méthode. Nous nous référerons en particulier, au vecteur  $n^\mu$  qui est localement le vecteur unitaire de type temps normal à l'hypersurface spatiale (géodésique dans la forme de Painlevé), au scalaire  $N$  et au vecteur spatial  $N^i$  qui sont respectivement le pas temporel (lapse) qui règle l'empilage des feuilles voisines spatiales et les composantes du vecteur d'entraînement  $3D$  (shift-vector) qui règle l'ajustement spatial des feuilles voisines entre elles.

### ***Comparaison entre le formalisme ADM et celui de la rivière.***

On peut d'abord noter une différence d'approche entre la rivière et la méthode ADM.

---

1 “Shift-vector” : vecteur d'entraînement, dont la nature est explicite dans l'approche ADM.

2 Voir Arnowitt R. Deser S. Misner C.W (2004) pour l'exposé de la méthode et Lehner L. (2001) pour des compléments.

3 Les solutions analytiques sont rares. Elles supposent un haut niveau de symétrie pour simplifier le système.

4 Bien que le temps se caractérise par un signe différent de celui de l'espace dans la forme de la métrique. Quelques éléments généraux donnant le principe de la méthode ADM sont donnés en annexe 9.

La méthode ADM fait un feuilletage  $3D+1D$  alors que la rivière utilise un espace-temps de Minkowski 4D associé à un espace spatial euclidien opératoire 3D..

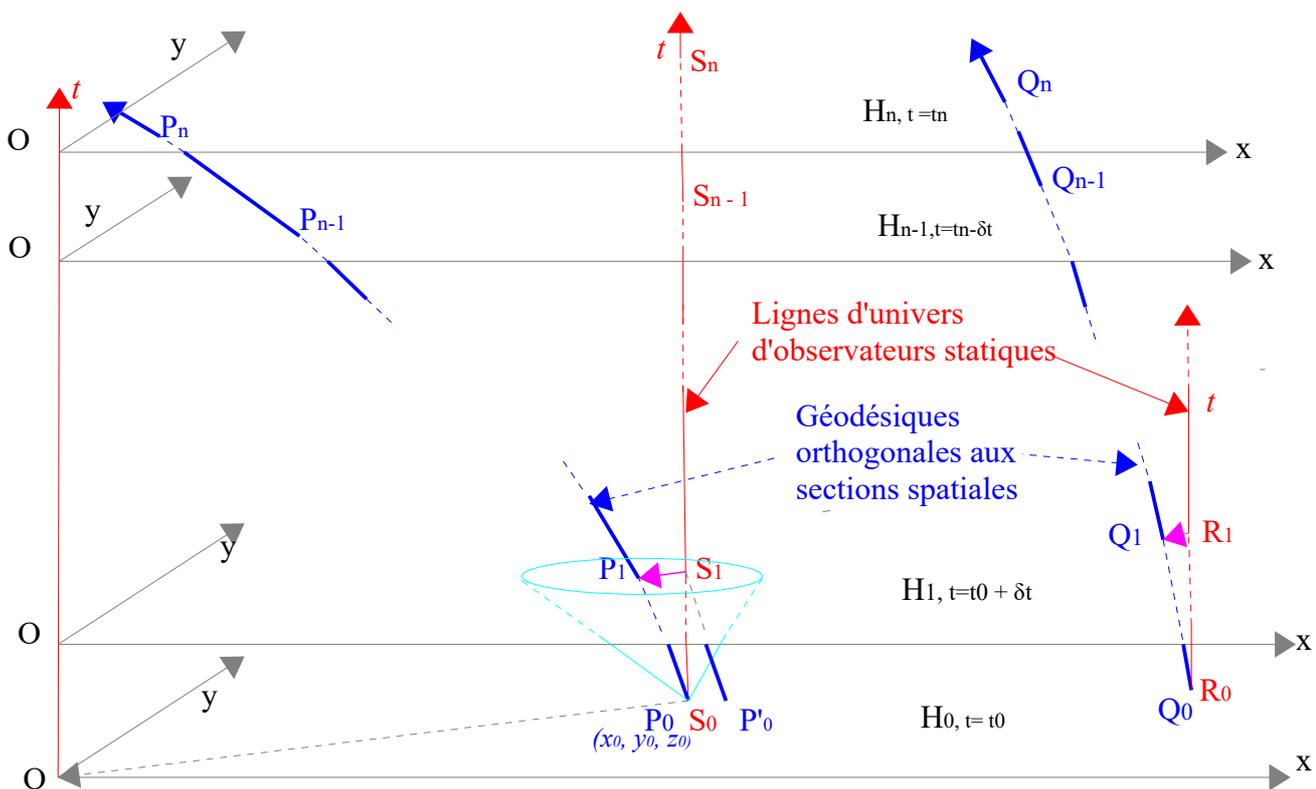
Mais dans notre cas comme les feuilles, hypersurfaces spatiales ADM, sont euclidiennes, rien ne nous empêche de compléter cet espace spatial par une dimension temps orthogonale à cet espace, ce que donne d'ailleurs naturellement localement le vecteur  $n^\mu$ .

Notons que comme  $n^\mu$  est un vecteur "constant" en module, si on le choisit comme vecteur de base de la coordonnée temporelle locale, nous pouvons avoir un espace-temps local minkowskien local qui est le même que celui défini localement dans la rivière.

### *L'interprétation géométrique dans l'approche ADM*

La figure ci-dessous va nous permettre d'illustrer quelques éléments de cette analyse.

Les sections spatiales (les feuilles  $H_i$ ) réduites à deux dimensions sont munies des coordonnées cartésiennes que nous avons utilisées pour le modèle de la rivière. Le point O de coordonnées  $(x = y = z = 0)$ , puisque nous avons posé  $z = 0$  partout, en est l'origine.



**Figure 18-1.** Représentation de la variété correspondante à la solution que nous étudions.

Deux géodésiques  $P_i, Q_i$  (en bleu), orthogonales aux sections spatiales, suivies par les observateurs de Painlevé, sont issues des points  $P_0, Q_0$  de coordonnées différentes dans  $H_0$ .

La coordonnée temporelle (en rouge) est représentée verticalement: c'est la ligne d'univers (non géodésique) des observateurs statiques dans cette forme de la métrique.

Rappelons que la valeur de la coordonnée temporelle dans la base  $(\partial_t)^\mu (S_0S_1)$  est identique au temps propre sur la géodésique  $(P_0P_1)$  mais ces valeurs sont mesurées sur des lignes d'univers différentes, dont l'angle dépend du vecteur d'entraînement.

La variété est formée par l'assemblage non solidaire des sections spatiales euclidiennes. Pour chaque point de la feuille, la géodésique locale (en bleu) suivie par l'observateur de Painlevé détermine le lien avec les points des autres feuilles, ainsi:  $P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_{n-1} \rightarrow P_n$ .

Ce modèle est valable pour tous les points, seul l'angle entre  $P_0P_1$  et  $S_0S_1$  dépend de la valeur locale du vecteur d'entraînement  $S_iP_i$  et  $R_iQ_i$ , en magenta, comme cela se voit pour les géodésiques  $P_i$  et  $Q_i$ .

Les sections spatiales  $H_0, H_1, H_{n-1}, H_n$  sont toutes identiques, la forme est stationnaire, mais l'ajustement "temporel" ne fait pas correspondre à un point de coordonnées  $x_0, y_0, z_0$  d'une feuille (par exemple  $H_0$ ) le point de mêmes coordonnées dans la feuille suivante ( $H_1$ ), à la différence d'une telle construction qu'on aurait réalisée en utilisant la forme de la métrique de Schwarzschild (limitée à l'extérieur de l'horizon).<sup>5</sup>

Mais comme le point  $S_i$  de mêmes coordonnées  $x_0, y_0, z_0$  dans  $H_i$  que  $P_0$  dans  $H_0$  est lui-même l'image d'un autre point ( $P'_0$ ) de  $H_0$  et ainsi de suite, l'ajustement ainsi réalisé est une application bijective qui couvre toute la section spatiale.

Ceci illustre comment la variation locale du mouvement de l'observateur de Painlevé ne dépend que du vecteur d'entraînement  $N^i$  qui régit<sup>6</sup> le glissement local des feuilles les unes par rapport aux autres dans leur ajustement pour produire la variété munie de ces coordonnées. Le fait que ce glissement soit non global (il est différent en chaque point) traduit la courbure de l'espace-temps<sup>7</sup>.

Alors que l'hypersurface spatiale euclidienne reste identique à elle-même et malgré les apparences sur la figure, c'est la coordonnée temporelle qui tourne et non pas le vecteur tangent à la géodésique parcourue par l'observateur de Painlevé qui reste orthogonal aux sections spatiales.

### Paramètres et équations essentielles de la décomposition 3+1 du champ d'Einstein.

Le principe de la méthode ADM est donné en annexe 9, mais pour comprendre les calculs et ce qui suit, il est utile d'en rappeler quelques éléments de définition.

En reprenant le chapitre 3-2, de **Arnowitt R. Deser S. Misner C.W** (2004), avec ses notations<sup>8</sup>, nous retenons

$$g_{ij} \equiv {}^4g_{ij}, \quad N \equiv \frac{1}{\sqrt{-{}^4g_{00}}}, \quad N_i \equiv {}^4g_{0i} \quad [3.9a] \quad , \quad (18-1)$$

$$\pi^{ij} \equiv \sqrt{-{}^4g} ({}^4\Gamma_{pq}^0 - g_{pq} {}^4\Gamma_{rs}^0 g^{rs}) g^{ip} g^{jq} \quad [3.9b] \quad . \quad (18-2)$$

Le préfixe indiciel haut 4 indique que nous faisons référence aux entités de l'espace-temps à 4 dimensions. Son absence indique que nous faisons référence aux entités spatiales à 3 dimensions, en

5 Où l'ajustement fait correspondre des points de coordonnées (spatiales) identiques et où le vecteur temps  $(\partial_t)^\mu$ , orthogonal à l'espace, n'est pas géodésique.

6 Rappelons que  $N$  est tel que le "pas temporel" d'intégration ( $n^\mu$ ), est constant. La valeur du glissement est bien proportionnelle au vecteur 3D d'entraînement. Ce vecteur  $N^i$  est appelé  $\beta^i$  dans le modèle de la rivière.

7 Si les feuilles étaient matérialisées par des membranes en caoutchouc, pour faire coïncider les points en correspondance entre deux feuilles successives il faudrait déformer de façon non homogène l'une des membranes pour procéder à l'ajustement (d'où la non linéarité).

8 On respecte également la numérotation des équations de l'article entre [...] et on les renumérote dans le contexte du document entre (...).

particulier  $g^{ij}$  dans (18-2) est la métrique inverse de  $g_{ij}$  (métrique spatiale)<sup>9</sup>.

Le moment conjugué  $\pi^{ij}$  dont la signification géométrique est naturelle est utilisé en lieu et place de la dérivée de  $g_{ij}$ . En effet, il est étroitement lié au tenseur contravariant de courbure extrinsèque et met en œuvre les dérivées spatiales de la métrique à travers les symboles de Christoffel d'indices spatiaux. Il est défini par :

$$\pi^{ij} = -g^{1/2}(K^{ij} - g^{ij} K)$$

où  $K_{ij} = n_{(i;j)}$  est le tenseur de courbure extrinsèque<sup>10</sup> (deuxième forme fondamentale) et  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal à l'hypersurface. Il se calcule par (18-2).

Avec  $N^i = g^{ij}N_j$ , la métrique complète  ${}^4g_{\mu\nu}$  et  ${}^4g^{\mu\nu}$  peut s'écrire en utilisant (18-1)

$${}^4g_{00} = -(N^2 - N_i N^i), \quad [3.10] \quad (18-3)$$

où  ${}^4g^{0i} = N^i/N^2, \quad {}^4g^{00} = -1/N^2, \quad [3.11a] \quad (18-4a)$

$${}^4g^{ij} = g^{ij} - (N^i N^j / N^2). \quad [3.11b] \quad (18-4b)$$

Une relation utile est :  $\sqrt{-{}^4g} = N \sqrt{g}. \quad [3.12] \quad (18-5)$

En termes des éléments définis en (3.9), le Lagrangien de la relativité générale devient<sup>11</sup>

$$L = \sqrt{-{}^4g} \quad {}^4R = -g_{ij} \partial_t \pi^{ij} - N R^0 - N_i R^i - 2 \partial_i (\pi^{ij} N_j - \frac{1}{2} \pi N^i + \nabla^i N \sqrt{g}) \quad , [3.13] \quad (18-6)$$

où

$$H = R^0 \equiv -\sqrt{g} [{}^3R + g^{-1} (\frac{\pi^2}{2} - \pi^{ij} \pi_{ij})] \quad [3.14a] \quad , \quad (18-7a)$$

$$P^i = R^i \equiv -2 \nabla_j \pi^{ij} \quad [3.14b] \quad . \quad (18-7b)$$

La composante  $R^0$  associée au temps (donc à l'énergie) est appelée la contrainte Hamiltonienne. Notons que c'est un scalaire construit à partir du scalaire  $g$  dérivé de la métrique, du scalaire de Ricci 3D et de scalaires dérivés du moment conjugué  $\pi = g_{ij} \pi^{ij}$  et  $\pi_{ij} \pi^{ij}$ .

Notons l'utilisation des indices hauts pour cette approche néo-newtonienne, ce qui rejoint ce que nous avons indiqué lorsque nous avons défini la métrique inverse au chapitre 16.

Les composantes  $R^i$  définissent un 3-vecteur spatial construit à partir de  $\pi^{ij}$  appelé la contrainte des moments spatiaux. Ces éléments sont définis dans l'hypersurface spatiale.

On note que  $N$  et  $N_i$  sont des multiplicateurs de Lagrange dans le Lagrangien, contraignant celui-ci par 4 équations supplémentaires. La dérivée covariante s'exécute en utilisant la métrique spécifiée (métrique fonction de la position de l'indice, spatiale si l'indice haut 4 n'est pas présent).

<sup>9</sup> Et non pas la partie spatiale de la métrique inverse  $g^{\mu\nu}$ .

<sup>10</sup> C'est l'équation qui est donnée dans Arnowitt R. Deser S. Misner C.W (2004) p.9.

<sup>11</sup> Le symbole "nabla" désigne la dérivation covariante par rapport à la métrique spatiale dans (18-6).

${}^3R$  est le scalaire de Ricci calculé à partir de la métrique spatiale  $g_{ij}$  et les indices spatiaux sont élevés ou abaissés en utilisant  $g^{ij}$  et  $g_{ij}$  et  $\pi = \pi^i$ .

## Équations du mouvement

Bien que les variables du Lagrangien représentent le tenseur métrique dans un espace à trois dimensions immergé dans un espace-temps à quatre dimensions, il est possible et souhaitable d'utiliser les procédures standards de la mécanique lagrangienne (équations de Lagrange en théorie des champs) pour en dériver les équations du mouvement qui décrivent l'évolution temporelle de la métrique  $g_{ij}$  et de son moment conjugué  $\pi^j$ .

Le résultat est un système non linéaire d'équation aux dérivées partielles., voir équations 3.15a à 3.15c de Arnowitt R. Deser S. Misner C.W (2004):

$$\partial_t g_{ij} = 2Ng^{-1/2}(\pi_{ij} - \frac{1}{2}\pi g_{ij}) + N_{i;j} + N_{j;i} \quad (3.15a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \pi^{ij} = & -N\sqrt{g}({}^3R_{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}{}^3R) + \frac{1}{2}Ng^{-1/2}g^{ij}(\pi^{mn}\pi_{mn} - \frac{1}{2}\pi^2) \\ & - 2Ng^{-1/2}(\pi^{im}\pi_m{}^j - \frac{1}{2}\pi\pi^{ij}) + \sqrt{g}(N^{ij} - g^{ij}N^m{}_{|m}) \\ & + (\pi^{ij}N^m)_{|m} - N^i{}_{|m}\pi^{mj} - N^j{}_{|m}\pi^{mi} \end{aligned} \quad (3.15b)$$

En étudiant la variation des équations par rapport au pas de temps et d'espace on obtient les contraintes  $H = R^0 = 0$  et  $P^i = R^i = 0$ .

Le calcul, particulièrement simple du fait que les sections spatiales sont euclidiennes, fait en annexe 9, en donne les constituants dans la forme de métrique de Painlevé.

## *Hyper-surfaces : première forme fondamentale*

Dans l'annexe 9 nous donnons les éléments essentiels utilisés par la méthode ADM tels qu'ils sont présentés par les auteurs dans leur article.

Dans le cas particulier qui nous intéresse, il est utile de présenter dans quel cadre général on traite les hypersurfaces<sup>12</sup> et certaines de leurs propriétés qui vont nous être utiles dans ce cas.

Pour obtenir la métrique induite  $g_{ij}$  sur une hypersurface imbriquée dans un espace-temps de métrique  $g_{\mu\nu}$ , définissons le tenseur de projection

$$P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \sigma n_\mu n_\nu, \quad (18-8)$$

où  $\sigma = n_\mu n^\mu = -1$  pour un vecteur de type temps.

Ce tenseur est quelquefois appelé *première forme fondamentale*.

<sup>12</sup> Ces éléments sont tirés de Carroll S.(2003) Appendix D et de Lehner L. (2001). Bien que ce formalisme soit général nous l'utilisons ici explicitement ou implicitement dans le cas du feuilletage ADM (hypersurface espace dans l'espace-temps). Les références sont celles des articles originaux.

## ***Hyper-surfaces : courbure extrinsèque, seconde forme fondamentale***

L'annexe 9 indique que  $g_{ij}$  est la variable dans le formalisme ADM. Nous avons aussi besoin de sa dérivée pour le problème. En fait le formalisme ADM choisit une autre grandeur (qui est liée à cette dérivée) construite à partir de la courbure extrinsèque, elle-même, appelée ***seconde forme fondamentale***.

La courbure extrinsèque que nous appellerons ici  $K_{\mu\nu}$  se définit à partir de  $P_{\mu\nu}$  :

$$K_{\mu\nu} = \mathcal{L}_n P_{\mu\nu}, \quad (18-9)$$

où  $\mathcal{L}_n$  est la dérivée de Lie par rapport à  $n^\mu$ .

C'est ce tenseur  $K_{\mu\nu}$  qui est utilisé dans le formalisme ADM (sous forme covariante et contravariante)

Comme la dérivée de Lie de  $g_{\mu\nu}$  peut s'écrire comme la dérivée covariante symétrisée du vecteur normal cela peut s'écrire :

$$K_{\mu\nu} = P^\alpha_\mu P^\beta_\nu n_{(\beta;\alpha)}. \quad (18-10)$$

Comme dans le cas général  $n_\mu$  n'est pas supposé nécessairement géodésique, nous pouvons définir une accélération  $a^\mu$  :

$$a^\mu = n^\nu n^\mu_{;\nu}. \quad (18-11)$$

En rappelant que  $\sigma = n_\mu n^\mu = -1$  dans le cas d'un quadrivecteur de type temps, on peut en déduire :

$$K_{\mu\nu} = n_{\nu;\mu} - \sigma n_\mu a_\nu. \quad (18-12)$$

On peut montrer que ce tenseur, entre autres, est symétrique et que dans le cas où le champ de vecteur  $n^\mu$  est géodésique ( $a^\mu = 0$ ) en tout point (ce qui est le cas dans la forme de Painlevé) alors sa définition (18-10) se simplifie pour se réduire à :

$$K_{\mu\nu} = n_{\nu;\mu}. \quad (18-13)$$

C'est simplement la dérivée covariante dans la métrique  $4D$  du vecteur covariant  $n_\mu$  dont la version contravariante  $n^\mu$  est le vecteur normal unitaire orthogonal aux hypersurfaces à  $t = \text{constante}$ , il vaut<sup>13</sup> :

$$n_\mu = N\{-1, 0, 0, 0\}.$$

---

13 La valeur  $-1$  pour la composante  $t$  de  $n_\mu$  résulte de l'orientation de  $n^\mu$  vers les  $t$  croissants et de  $n_\mu n^\mu = -1$ .

Dans la forme de Painlevé comme  $g^{00} = -1$ ,  $N = (-g^{00})^{-1/2} = 1$ .

En conséquence :

$$K_{\mu\nu} = n_{\nu;\mu} = \partial_\mu n_\nu - n_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0 + N \delta_{\lambda}^0 \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = N \Gamma_{\mu\nu}^0 = \Gamma_{\mu\nu}^0.$$

Car  $n_\mu$  étant constant, sa dérivée partielle est nulle et n'ayant qu'une composante non nulle seule la valeur 0 de l'indice haut du symbole de Christoffel est sommé et  $N$  vaut 1.

**Les coefficients de Ricci de la rivière sont la projection de la courbure extrinsèque.**

Dans le formalisme ADM (que nous avons succinctement décrit et qui permet de définir l'espace-temps correspondant à des équations d'Einstein) nous utilisons  $K_{ij}$ , rétro-projection sur l'hypersurface spatiale de ce tenseur. Précisons cela.

L'hypersurface spatiale (sous-variété 3D où on a formellement défini un système de coordonnées  $y^i$  ici  $\{x, y, z\}$ ) étant imbriquée dans la variété 4D décrivant l'espace-temps où le système de coordonnées est  $x^\mu$  ici  $\{x, y, z, t\}$ , on définit cette rétro-projection par une application univoque  $\Phi : y^i \rightarrow x^\mu$  qui est ici évidente, la matrice rectangulaire  $(3 \times 4)$  vaut 1 pour  $\mu = i$  et 0 dans le cas contraire :

$$K_{ij} = K_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j},$$

$$K_{ij} = \Gamma_{\mu\nu}^0 \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j},$$

$$K_{ij} = \Gamma_{ij}^0.$$

Nous avons calculé  $\Gamma_{\mu\nu}^0$  à différentes occasions (voir annexe 7 par exemple) d'où il est facile d'extraire  $\Gamma_{ij}^0$ .

Nous avons déjà indiqué dans le chapitre de la rivière que les  $\Gamma_{ij}^0$  et étaient égaux aux coefficients de rotation de Ricci utilisés dans ce modèle<sup>14</sup>.

La nature des coefficients de rotation de Ricci utilisés dans le modèle de la rivière nous apparaît alors clairement, c'est la projection sur l'hypersurface à temps constant de la courbure extrinsèque (deuxième forme fondamentale).

***Les coefficients de Ricci de l'équation géodésique de la rivière sont des tenseurs***

Nous avons donc une interprétation géométrique claire du résultat présenté comme "miraculeux" dans le modèle de la rivière, en particulier cela montre le caractère tensoriel des  $\Gamma_{ij}^0$ , du fait de la relation  $K_{ij} = \Gamma_{ij}^0$  puisque  $K_{ij}$  est un tenseur. Il n'est pas trivial qu'un sous ensemble des symboles de Christoffel soit un tenseur, car ceux-ci ne sont pas globalement les composantes d'un tenseur.

---

14 Rappelons que les calculs ont montré que pour les coefficients de rotation de Ricci  $\Gamma_{ij}^0 = \Gamma_{0j}^i$ .

## Équivalences entre le modèle de la “rivière” et le formalisme ADM

Nous avons noté l’identité entre l’espace-temps minkowskien tangent co-mobile de l’espace dans le modèle de la rivière et celui également minkowskien du formalisme ADM que les vecteurs de base spatiaux de l’hypersurface spatiale et le vecteur de type temps  $n^\mu$ , qui y est normal, définissent.

Il convient donc de considérer la projection du tenseur de courbure extrinsèque qui est défini dans cette hypersurface dont on déduit les équations du mouvement dans le formalisme ADM pour le mettre en correspondance avec les paramètres définissant le mouvement dans le modèle de la rivière.

Nous avons bien noté que dans le formalisme ADM du fait du feuilletage 3D +1D c’est la variation de la métrique spatiale, exprimée totalement dans l’hypersurface spatiale qui devait être prise compte pour décrire la “courbure” (le terme représenté par la connexion dans l’équation géodésique) d’une géodésique puisque, comme nous l’avons dit, la coordonnée temporelle est linéaire et qu’il n’y a que les paramètres spatiaux qui varient.

Le fait de définir un espace local 4D de Minkowski en ajoutant la dimension temporelle par le vecteur  $n^\mu$  ne change pas cela. Dans la rivière c’est dans l’équation géodésique, dans l’espace 4D de Minkowski, qu’on trouve les coefficients de rotation de Ricci égaux à  $K_{ij}$ .

Le formalisme ADM est donc équivalent et en propose une autre approche par la reconstruction de l’espace de Minkowski à partir de l’hypersurface spatiale et montre que les équations du mouvement ne dépendent nativement que de la variation spatiale, le long de la trajectoire, du tenseur métrique spatial dans la feuille.

Les paramètres régissant l’équation géodésique dans l’espace (courbe) de Painlevé de géodésiques non co-mobiles sont contrôlés par la courbure extrinsèque. Elle traduit comment les géodésiques normales à la surface, d’un faisceau, se comportent localement relativement par rapport à une géodésique de référence, ici la géodésique normale co-mobile de l’espace-temps, au centre du faisceau.

### *Convergence entre congruences et hypersurfaces*

Cette phénoménologie est semblable à celle que nous avons évoquée lorsque nous avons traité des congruences (chapitre 13). Complétons notre analyse en vérifiant que, puisque les vecteurs normaux à l’hypersurface sont des géodésiques, l’évolution de la congruence correspond au concept de courbure extrinsèque tel qu’il a été défini.

En coordonnées cartésiennes, avec

$$U_{\text{ff}}^\mu = (1, \beta^1, \beta^2, \beta^3),$$

qui n’est autre que le vecteur que nous avons appelé ici  $n^\mu$ .

En posant

$$\beta^\mu = \beta \left( 0, -\frac{x}{r}, -\frac{y}{r}, -\frac{z}{r} \right),$$

où

$$\beta = \sqrt{\frac{2GM}{r}},$$

dans l’étude des congruences de géodésiques (de type temps) on définit un tenseur

$$B^\mu_{\ ;\nu} = U_{ff^\mu ;\nu}.$$

qui permet de définir par sa version covariante :

$$B_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} B^\lambda_{\ ;\nu} = g_{\mu\lambda} U_{ff^\lambda ;\nu} = U_{ff^\mu ;\nu}.$$

Cette relation, si on tient compte que  $U_{ff^\mu} = n^\mu$ , est identique à la relation (18-13).

Ceci montre que :

$$K_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}.$$

donc les relations :

$$B_{\mu\nu} = \frac{1}{3} \cdot \theta \cdot P_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu},$$

où :

$$P_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} P^\lambda_{\ ;\nu} = g_{\mu\lambda} (\delta^\lambda_{\ ;\nu} + U_{ff^\lambda} U_{ff^\nu}) = g_{\mu\nu} + U_{ff^\mu} U_{ff^\nu}.$$

Avec le tenseur de projection :

$$P^\mu_{\ ;\nu} = \delta^\mu_{\ ;\nu} + U_{ff^\mu} U_{ff^\nu},$$

qui sous forme covariante s'écrit

$$P_{\mu\nu} = g_{\alpha\mu} P^\alpha_{\ ;\nu} = g_{\alpha\mu} \delta^\alpha_{\ ;\nu} + g_{\alpha\mu} U_{ff^\alpha} U_{ff^\nu} = g_{\mu\nu} + U_{ff^\mu} U_{ff^\nu},$$

ce qui est identique à la première forme fondamentale (18-8) si on tient compte que  $\sigma = -I$ .

Les conclusions que nous avons tirées des congruences de géodésiques, dans le contexte de la métrique de Painlevé, s'appliquent alors à notre analyse ADM et vice versa.

Nous voyons que ces approches qui paraissent traiter de sujets indépendants convergent, car elles traitent du même concept: " la divergence de géodésiques".<sup>15</sup>

---

15 Cela est décrit par la déviation géodésique qui est le concept fondamental de base, qui définit l'accélération relative  $a^\mu = R^\mu_{\ \nu\rho\sigma} T^\nu T^\rho S^\sigma$  d'une famille, paramétrée par  $s$ , de géodésiques de paramètre affine  $t$ .  $S$  est le champ de vecteurs qui pointent d'une géodésique vers l'autre et  $T$  celui des vecteurs tangents aux géodésiques. Nous trouverions bien sûr les mêmes résultats. Ceci est fait dans Hamilton A. & Lisle J. 2006, équation (86) p. 13.

## La masse (énergie) ADM

### Définition

Dans le chapitre 16 nous avons évalué la masse (l'énergie) du trou noir en utilisant les équations données par le pseudo-tenseur de gravitation.

Nous avons trouvé que selon le référentiel nous obtenions des résultats différents.

Le formalisme ADM définit une masse par une intégrale à l'infini de manière similaire à ce que nous avons déjà utilisé.

Dans le document de *R. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner 2004* cette masse composante temporelle du 4-moment est définie par l'équation (5.1) p. 16

$$P^0 = \oint (g_{ij,j} - g_{jj,i}) dS_i \quad , \quad (a)$$

où  $dS_i$  est l'élément de surface spatiale à  $\infty$ .

D'autres définitions équivalentes existent. Carroll (2003, p. 253, équation 6.46), avec la métrique sous forme  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , donne

$$P^0 = E_{ADM} = \int d^2x \sqrt{\gamma^{(2)}} \sigma^i (\partial_j h^j_i - \partial_i h^j_j) \quad , \quad (b)$$

où,  $\gamma^{(2)}$  est la métrique sur la 2-sphère à l'infini spatial. Les indices spatiaux ayant été élevés en utilisant  $\delta_{ij}$  (la métrique spatiale à l'infini) ceci est équivalent à :

$$P^0 = E_{ADM} = \int d^2x \sqrt{\gamma^{(2)}} \sigma^i \Sigma_j (\partial_j h_{ij} - \partial_i h_{jj}) \quad . \quad (c)$$

On intègre sur la 2-sphère à l'infini et utilise les coordonnées cartésiennes dans tous les cas.

## Forme cartésienne de la métrique de Schwarzschild

Rappelons que la métrique s'écrit sous forme matricielle<sup>16</sup>.

$$\begin{array}{cccc}
 -1 + \frac{2m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 + \frac{2mx^2}{(x^2+y^2+z^2)(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2})} & \frac{2mxy}{(x^2+y^2+z^2)(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2})} & \frac{2mxz}{(x^2+y^2+z^2)(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2})} \\
 0 & \frac{2mxy}{(x^2+y^2+z^2)(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2})} & 1 + \frac{2my^2}{(x^2+y^2+z^2)(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2})} & \frac{2myz}{(x^2+y^2+z^2)(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2})} \\
 0 & \frac{2mxz}{(x^2+y^2+z^2)(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2})} & \frac{2myz}{(x^2+y^2+z^2)(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2})} & 1 + \frac{2mz^2}{(x^2+y^2+z^2)(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}
 \end{array}$$

On en déduit immédiatement  $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ .

Le calcul de  $\Sigma_j (\partial_j h_{ij} - \partial_i h_{jj})$  donne le résultat suivant pour  $x^i$  :

$$\begin{array}{c}
 \frac{4mx}{(x^2+y^2+z^2)(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2})} \\
 \frac{4my}{(x^2+y^2+z^2)(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2})} \\
 \frac{4mz}{(x^2+y^2+z^2)(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}
 \end{array}$$

Si on effectue  $\Sigma_j (\partial_j g_{ij} - \partial_i g_{jj})$ , cela donne (de façon évidente) la même chose.

Remarquons que ces termes sont identiques à ceux (les  $h^{00i}$ ) que nous avons trouvé lors du calcul avec le pseudo-tenseur de gravitation dans ces coordonnées au chapitre 16, alors :

$$E_{ADM} = \frac{1}{16\pi G} \oint (\partial_j h_{ji} - \partial_i h_{jj}) \frac{x^i}{r} (r^2) \sin(\theta) (d\theta) d\phi = \frac{4M}{16\pi G} \iint \sin(\theta) (d\theta) d\phi = M$$

Il est alors évident que l'intégrale (c) qui a la même forme mais où les  $h^{00i}$  sont remplacés par  $\partial_j g_{ij} - \partial_i g_{jj}$  va donner le même résultat, ce qu'on vérifie simplement à savoir :

$$E_{ADM} = M$$

## Forme cartésienne de la métrique de Painlevé.

Si on fait le même calcul avec la forme cartésienne de Painlevé<sup>17</sup>, la métrique spatiale étant euclidienne  $g_{ij} = \delta_{ij}$ , alors  $\Sigma_j (\partial_j g_{ij} - \partial_i g_{jj}) = \Sigma_j (\partial_j h_{ij} - \partial_i h_{jj}) = 0$ . Il est évident qu'on va trouver :

$$E_{ADM} = 0.$$

<sup>16</sup> Dans les tableaux issus de Mathematica,  $M$  est noté  $m$ .

<sup>17</sup> On peut aussi le faire dans les autres formes cartésiennes de la métrique (Finkelstein-Eddington, Isotrope,...) on trouve des résultats différents mais on ne trouve de résultat nul que dans la forme de Painlevé.

Ce qui confirme les résultats que nous avons trouvé avec la méthode utilisant le pseudo-tenseur de gravitation, confirmant l'équivalence de l'approche ADM et de celle du pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz.

Nous n'avons pas calculé les valeurs de  $P^i$  (composantes spatiales du quadrivecteur impulsion matière-gravitation). En formalisme ADM elles sont données par :

$$P^i = -2 \oint \pi^{ij} dS_j .$$

Le terme  $\pi^{ij}$  est l'équivalent de  $h^{ij}$  dans l'équation donnant  $P^i$  par le formalisme de Landau et Lifchitz, ce qui explique l'équivalence des  $\pi^{ij}$  et  $h^{ij}$  que nous avons relevée au chapitre 16.

Le Hamiltonien (caractéristique de l'énergie) calculé dans le formalisme ADM est nul dans cette forme (voir Annexe 9).

Cela confirme que dans cette forme la gravitation semble effacée, ce qui se manifeste par une masse (énergie) nulle dans ces coordonnées<sup>18</sup>.

### ***La forme de la métrique dans le formalisme ADM appliqué à la forme de Painlevé***

#### **Méthode**

Avec comme nous l'avons vu,  $g_{00} = N^2 - N_i N^i$ , dans le formalisme ADM, du fait du feuilletage, on peut mettre la métrique sous la forme<sup>19</sup>:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ij} (dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt), \quad (18-14)$$

C'est bien ce qu'on retrouve dans la forme de Painlevé avec  $N = (-g^{00})^{-1/2} = 1$  et  $N_i = g_{0i}$ , donnés dans l'annexe 7 par exemple. Dans la forme de Painlevé  $g_{ij} = \delta_{ij}$  on peut alors mettre (A9-4) sous la forme donnée dans le modèle de la rivière

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} (dx^\mu + N^\mu dt)(dx^\nu + N^\nu dt),$$

où

$$N^\mu = t^\mu - N \cdot n^\mu, \quad (18-15)$$

avec

$$n^\mu = N \cdot t^{\cdot\mu} = N \cdot g^{\mu\nu} t_{;\nu} = N \cdot g^{\mu\nu} \partial_\nu t,$$

$$N^\mu n_\mu = 0, \quad (18-16)$$

ce qui fait que dans ce référentiel,  $N^\mu = (0, N^i)$ .

18 Nous retrouvons bien le caractère "non covariant" de l'énergie de gravitation qui dépend de l'observateur. Notons que cela redevient cohérent, la masse gravitationnelle étant nulle dans tous les cas, si on considère non pas le trou noir ou le trou blanc séparément mais la somme des "flux" traversant l'ensemble des deux, ce qui est d'ailleurs conforme avec ce qu'on est en droit de s'attendre quand le tenseur énergie-impulsion est nul partout (sauf en un point où il est singulier).

19 Lehner L. (2001) éq. (2 - 4), p.7.

## Annexe 9 : fondements du formalisme ADM <sup>20</sup>

### Solutions de l'équation d'Einstein

Lorsque la résolution analytique de l'équation d'Einstein n'est pas possible (ce qui est le cas général) nous pouvons tenter de la résoudre numériquement pour diverses sources d'énergie et d'impulsion et étudier le comportement de particules de test dans ces solutions.

### Problème des conditions initiales et de leur évolution en Relativité générale

Comme la métrique est notre variable fondamentale, notre premier propos sera de considérer les valeurs<sup>21</sup>  $g_{\mu\nu}|_{\Sigma}$  de la métrique sur notre hypersurface comme les coordonnées<sup>22</sup> et les dérivées<sup>23</sup> par rapport au temps  $\partial_t g_{\mu\nu}|_{\Sigma}$  (conformément à certaines coordonnées de temps spécifiées) comme étant l'impulsion, tous deux définissant l'état. (Il y a aussi des coordonnées et une impulsion pour les champs matériels que nous ne considérerons pas explicitement.)

Bien que  $G^{\mu\nu}$ , dans sa généralité, invoque des dérivées secondes par rapport au temps, l'identité de Bianchi montre que les composantes  $G^{0\nu}$  n'en comportent pas.

Sur les dix équations correspondant aux dix composantes indépendantes de l'équation d'Einstein, les quatre représentées par

$$G^{0\nu} = 8\pi G T^{0\nu}, \quad (82)$$

ne peuvent pas être utilisées pour calculer l'évolution des données initiales  $(g_{\mu\nu}, \partial_t g_{\mu\nu})|_{\Sigma}$ .

### Contraintes sur les données initiales

Elles sont en fait des contraintes sur les données initiales.

Nous ne sommes pas libres de spécifier n'importe quelle combinaison de la métrique et de ses dérivées par rapport au temps sur l'hypersurface  $\Sigma$ , car elles doivent satisfaire les relations (82).

Les équations restantes

$$G^{ij} = 8\pi G T^{ij}, \quad (83)$$

représentent les équations d'évolution dynamique pour la métrique.

Nous n'avons que six équations pour les dix fonctions inconnues  $g_{\mu\nu}(x^\sigma)$ , donc la solution va

20 Cette partie est une traduction qui reprend l'analyse donnée à la fin du chapitre 4 de Sean Carroll pour une large part <https://www.preposterousuniverse.com/grnotes/>

21 Valeurs qui s'évaluent dans une forme de la métrique à sélectionner selon des critères explicités dans Lehner L. (2001) p.5-6, "Suitable coordinates".

22 Coordonnées généralisées au sens de celles utilisées dans l'approche Hamiltonienne qui va être mise en œuvre. La coordonnée temporelle va jouer un rôle spécifique du fait de la décomposition 4D en 3D+1D. La construction du Lagrangien associé à la méthode, le choix des variables canoniques permettant le traitement Hamiltonien du problème et les critères de choix sont formellement traités dans **Arnowitz R. Deser S. Misner C.W** (2004)

23 En fait, dans le formalisme ADM, on choisit le tenseur qui caractérise la courbure extrinsèque de l'hypersurface spatiale à 3 dimensions imbriquée dans l'espace-temps à 4 dimensions, appelée seconde forme fondamentale, car elle a une interprétation géométrique naturelle.

inévitablement impliquer une quadruple indétermination.

Elle correspond aux quatre degrés de liberté que nous avons préalablement évoqués correspondant au choix des quatre fonctions de coordonnées de l'espace-temps.

En développant (83) on trouve des termes  $\partial^2_t g_{ij}$ , mais pas de termes  $\partial^2_t g_{0v}$ .

Un "état" en Relativité générale va consister en une spécification des composantes de type espace de la métrique  $g_{ij}|_\Sigma$  et de leurs dérivées premières par rapport au temps  $\partial_t g_{ij}|_\Sigma$  sur l'hypersurface  $\Sigma$ , à partir de laquelle nous allons déterminer la future évolution en utilisant (83), limitée par une ambiguïté incontournable concernant les composantes  $g_{0v}$ .

Cette situation est précisément analogue à celle de l'électromagnétisme, où nous savons qu'il n'y a pas suffisamment de données initiales pour déterminer l'évolution de façon unique, car il y a toujours la possibilité de réaliser la transformation de jauge  $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial_\mu \lambda$ .

### Choix d'une jauge

En relativité générale, les transformations de coordonnées jouent un rôle qui rappelle celui de la transformation de jauge en électromagnétisme.

Une manière de lever cette indétermination consiste à choisir une jauge. En électromagnétisme, cela signifie fixer une condition sur le potentiel vecteur  $A_\mu$ , qui va contraindre notre liberté de transformation de jauge.

Par exemple on peut choisir la jauge de Lorentz qui impose  $\nabla_\mu A^\mu = 0$ , ou une jauge temporelle où  $A_0 = 0$ .

On peut faire l'équivalent en Relativité générale en fixant notre système de coordonnées.

Prenons la jauge harmonique (également connue sous le nom de jauge de Lorentz entre autres) qui recueille un large consensus, elle s'exprime :

$$\square x^\mu = 0. \tag{84}$$

Ici  $\square = \nabla^\mu \nabla_\mu$  est le d'Alembertien covariant. Précisons que lorsque nous prenons les dérivées covariantes de  $x^\mu$ , nous considérons les **fonctions scalaires**  $x^\mu$ , définissant les coordonnées, sur la variété.

La condition est alors :

$$\square x^\mu = g^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma x^\mu - g^{\rho\sigma} \Gamma^\lambda_{\rho\sigma} \partial_\lambda x^\mu = -g^{\rho\sigma} \Gamma^\lambda_{\rho\sigma} = 0. \tag{85}$$

Dans l'espace Euclidien, les coordonnées cartésiennes (dans lesquelles  $\Gamma^\lambda_{\rho\sigma} = 0$ ) sont des coordonnées harmoniques.

Par principe toute fonction telle que  $\square f = 0$  est appelée une fonction harmonique.

Pour vérifier que ce choix de coordonnées fixe bien notre liberté de jauge, réécrivons la condition (84) sous une forme plus simple. Nous avons

$$g^{\rho\sigma}\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma}g^{\mu\nu}(\partial_{\rho}g_{\sigma\nu} + \partial_{\sigma}g_{\rho\nu} - \partial_{\nu}g_{\rho\sigma}), \quad (86)$$

d'après la définition des symboles de Christoffel.

Parallèlement de  $\partial_{\rho}(g^{\mu\nu}g_{\sigma\nu}) = \partial_{\rho}\delta^{\sigma}_{\mu} = 0$ , nous tirons :

$$g^{\mu\nu}\partial_{\rho}g_{\sigma\nu} = -g_{\sigma\nu}\partial_{\rho}g^{\mu\nu}. \quad (87)$$

Et en utilisant le résultat de nos investigations antérieures sur la variation du déterminant de la métrique nous avons :

$$\frac{1}{2}g_{\rho\sigma}\partial_{\nu}g^{\rho\sigma} = \frac{-\partial_{\nu}\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}. \quad (88)$$

En mettant tout cela ensemble, il vient (en général) :

$$g^{\rho\sigma}\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} = \frac{\partial_{\lambda}(\sqrt{-g}g^{\lambda\mu})}{\sqrt{-g}}. \quad (89)$$

La condition de jauge harmonique (85) est donc équivalente à :

$$\frac{\partial_{\lambda}(\sqrt{-g}g^{\lambda\mu})}{\sqrt{-g}} = 0. \quad (90)$$

En prenant la dérivée partielle sachant que  $t = x^0$  cela donne :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\sqrt{-g}g^{0\nu}) = \frac{-\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{-g}g^{i\nu}) \right). \quad (91)$$

Cette condition représente une équation différentielle du deuxième ordre sur les composantes libres de la métrique  $g^{0\nu}$ , en fonction des données initiales fournies. Nous avons donc réussi à fixer les degrés de liberté de jauge et nous pouvons maintenant résoudre l'évolution de la métrique dans sa totalité en coordonnées harmoniques.

### **Le problème possède toutes les données nécessaires à sa résolution**

Du moins localement, car nous avons éludé le fait que notre choix de jauge peut ne pas être bien défini globalement, et que nous pourrions être amenés à travailler sur des "pièces" de la variété qu'il faudrait alors raccorder pour obtenir la variété complète.

Le même problème est présent dans les théories de jauge de la physique des particules. Remarquons qu'il reste quelques degrés de liberté. Notre condition de jauge (84) ne restreint que les coordonnées qui s'étendent à partir de la surface initiale  $\Sigma$  à travers l'espace-temps, mais on peut toujours choisir librement des coordonnées  $x^i$  sur  $\Sigma$ .

Ceci correspond au fait qu'une transformation de coordonnée  $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu} + \delta^{\mu}$ , avec  $\square\delta^{\mu} = 0$ , est compatible avec la condition de jauge harmonique.

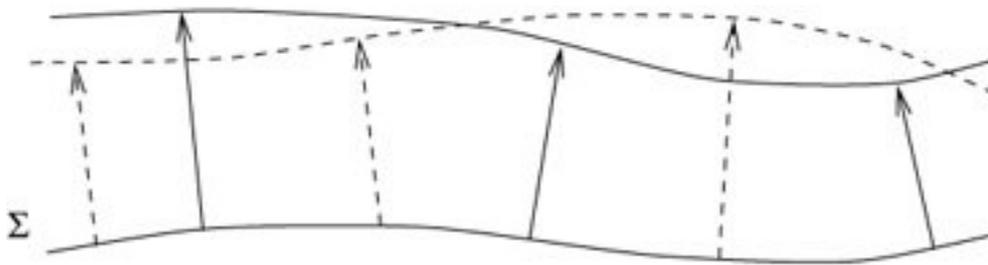
Nous avons maintenant bien défini les conditions initiales pour ce problème de Relativité générale, un état est spécifié par ses composantes d'espace de la métrique et de leurs dérivées par rapport au temps sur une hypersurface de type espace  $\Sigma$ .

Ceci étant donné les composantes de type espace (83) des équations d'Einstein nous permettent de faire évoluer la métrique dans le temps, sous réserve d'une ambiguïté, dans le choix des coordonnées que nous pouvons lever par un choix de jauge.

Gardons à l'esprit que les données de départ ne peuvent pas être arbitraires mais doivent satisfaire les contraintes (82). Une fois satisfaites sur une hypersurface de type espace, les équations du mouvement garantissent qu'elles le resteront comme on peut le vérifier.

Ces contraintes garantissent que le résultat restera covariant dans l'espace-temps, après avoir feuilleté notre variété en hypersurfaces de type espace.

En particulier, la contrainte  $G^{i0} = 8\pi GT^{i0}$  implique que l'évolution est indépendante de notre choix de coordonnées  $\Sigma$ , alors que  $G^{00} = 8\pi GT^{00}$  force l'invariance vis-à-vis des différentes façons de feuilletter l'espace-temps en hypersurfaces de type espace.



### Discussion sur l'existence de solutions

Une fois traité le problème d'initialisation des équations d'Einstein, un élément d'importance cruciale est l'étude de l'existence de solutions à ce problème.

Autrement dit, une fois spécifiée une hypersurface de type espace avec ses données initiales, jusqu'à quelle distance un espace-temps unique peut-il être déterminé.

Bien que la réponse précise à cette question soit plutôt ardue, il est assez simple d'examiner les **conditions de non existence** d'une solution bien définie, ce que nous allons faire.

Il est plus simple de considérer l'évolution de champs de matière dans un cadre fixe, que l'évolution de la métrique elle-même. Considérons donc une hypersurface de type espace  $\Sigma$  dans une variété  $M$  avec une métrique fixe  $g_{\mu\nu}$ , et de surcroît examinons un sous ensemble connecté  $S$  dans  $\Sigma$ .

Notre ligne de conduite sera qu'aucun signal ne se propage plus vite que la lumière, donc l'information ne va s'écouler que sur des chemins de type temps ou lumière (pas nécessairement des géodésiques).

### Domaines de dépendance

Nous définissons le **domaine de dépendance du futur** de  $S$ , noté  $D^+(S)$ , comme l'ensemble des points  $p$  tels que toutes les courbes infinies correspondant à un chemin vers le passé à partir de  $p$  coupent  $S$ .

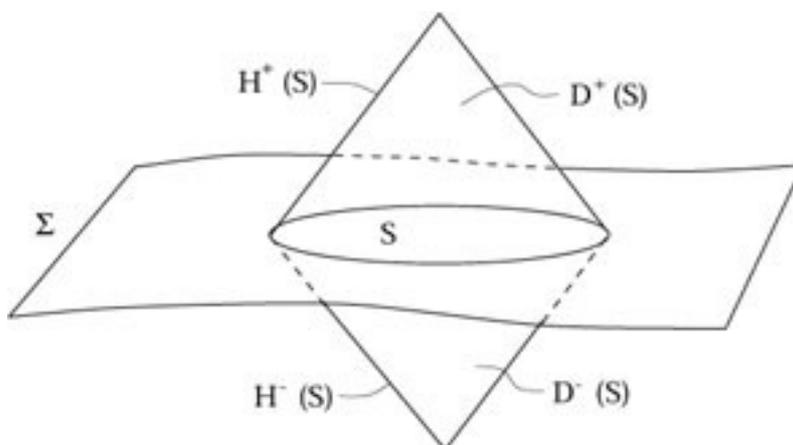
Interprétons cette définition de façon à ce que,  $S$  lui-même, soit un sous ensemble de  $D^+(S)$ .

De même définissons le domaine de **dépendance du passé**  $D^-(S)$  de la même manière, mais en remplaçant chemin vers le passé par chemin vers le futur

Généralement certains points de  $M$  vont être dans un des domaines de dépendances et d'autres n'y seront pas.

Définissons la frontière de  $D^+(S)$  comme **horizon de Cauchy du futur**  $H^+(S)$  et de même la frontière de  $D^-(S)$  comme **l'horizon de Cauchy du passé**  $H^-(S)$ .

Il est clair que les deux horizons sont des surfaces nulles.



Comme rien ne va plus vite que la lumière, les signaux ne peuvent pas se propager à l'extérieur du cône de lumière associé à  $p$ .

Donc si chaque courbe qui reste à l'intérieur du cône coupe  $S$ , alors l'information spécifiée sur  $S$  sera suffisante pour prédire quelle sera la situation à  $p$  (*Les données initiales du champ de matière de  $S$  peuvent être utilisées pour calculer la valeur des champs en  $p$* ).

L'ensemble des points pour lesquels on peut prédire l'état, en connaissant celui de  $S$  est simplement l'union  $D^+(S) \cup D^-(S)$ .

On peut facilement étendre ces idées développées pour le sous ensemble  $S$  à l'hypersurface  $\Sigma$  dans son intégralité.

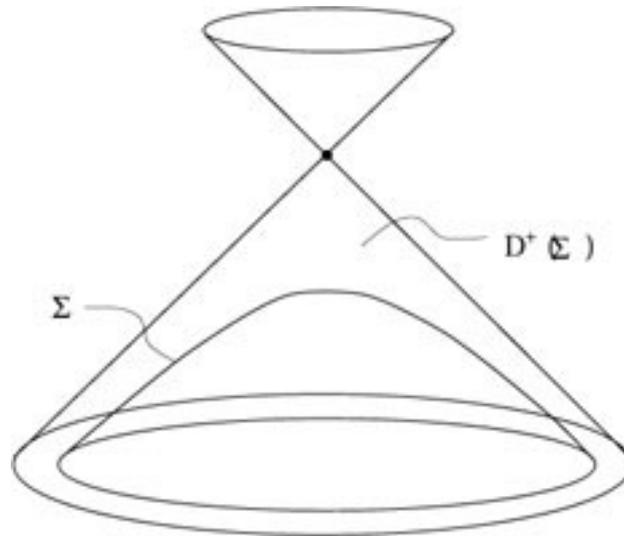
Le point important est que  $D^+(\Sigma) \cup D^-(\Sigma)$  peut ne pas être  $M$  dans son intégralité, même si  $\Sigma$ , lui-même, semble être une hypersurface convenable, s'étendant à travers l'espace.

### Difficultés qu'on peut rencontrer

Il y a différents types de difficultés. L'une d'entre elle est de choisir une "mauvaise hypersurface",

encore qu'il soit difficile de dire quand une hypersurface est mauvaise pour cet usage.

Considérons l'espace de Minkowski et une hypersurface de type espace  $\Sigma$  qui reste dans le passé du cône de lumière d'un certain point.



Dans ce cas  $\Sigma$  est une bonne surface de type espace, mais il est clair que  $D^+(\Sigma)$  s'arrête au cône de lumière, et qu'on ne peut pas utiliser l'information sur  $\Sigma$  pour prédire ce qui se passe dans l'espace de Minkowski.

Naturellement, nous aurions pu prendre d'autres hypersurfaces dont le domaine de dépendance aurait été la variété en entier. Aussi ceci ne nous traumatise pas trop.

### Espaces temps comportant des boucles temporelles : exemple "Espace de Misner"

C'est un espace bidimensionnel avec la topologie  $\mathbb{R}^1 \times S^1$ , et une métrique pour laquelle le cône de lumière s'incline progressivement au fur et à mesure qu'on avance dans le temps.

Passé un certain point, il est possible de voyager sur des trajectoires de type temps qui s'enroulent autour de  $S^1$  et se referment sur elles-mêmes.

On les appelle des **boucles temporelles**

Si nous avons spécifié une surface  $\Sigma$  dans le passé de ce point, alors aucun des points de la région contenant des boucles temporelles n'est dans le domaine de dépendance de  $\Sigma$ , puisque les boucles temporelles ne coupent pas  $\Sigma$ .

C'est assurément un problème plus sérieux que le précédent, puisqu'il ne semble pas exister dans ce type d'espace-temps de solution au problème de prédiction de l'évolution en partant de valeurs initiales bien définies.

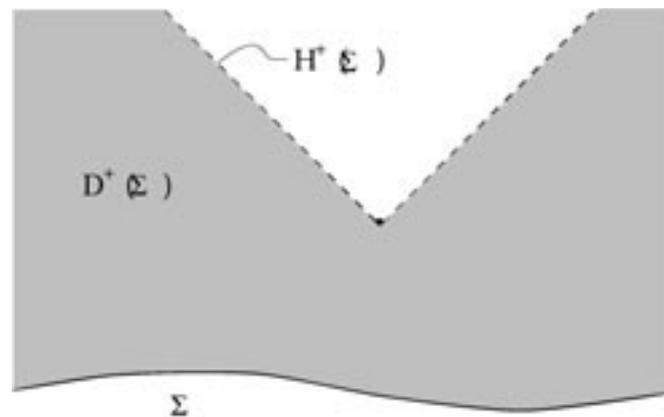
Les problèmes de ce type sont toujours en investigation, donc difficile de dire que cette énigme est réglée).

## Singularités

Le dernier exemple est fourni par l'existence de singularités, points qui ne sont pas dans la variété, bien qu'ils puissent être atteints en voyageant sur une géodésique sur une distance finie.

Typiquement, elles apparaissent quand la courbure devient infinie en un point, si cela arrive, le point ne peut plus être considéré comme appartenant à l'espace-temps.

Une telle occurrence peut mener à l'émergence d'un horizon de Cauchy, un point  $p$  qui est dans le futur de la singularité ne peut pas être dans le domaine de dépendance d'une hypersurface qui est dans le passé de la singularité.



Tous ces obstacles peuvent aussi se produire dans le problème des valeurs initiales en relativité générale, quand on essaie de faire évoluer la métrique, elle-même, depuis des valeurs initiales.

## Synthèse des difficultés

La possibilité de prendre une mauvaise hypersurface de départ n'est pas fréquente.

Il faut être attentif, en cas de résolution numérique de l'équation d'Einstein, à ne pas faire un mauvais choix d'hypersurface de départ qui peut conduire à des calculs inextricables, même si, en principe, une solution complète existe.

La relativité générale s'efforce d'éviter les boucles temporelles, il y a des solutions qui les incluent, mais elles ne résultent pas d'une évolution à partir de données initiales.

Les singularités sont par contre incontournables. Le simple fait que la gravitation soit toujours attractive génère une concentration de matière, augmentant la courbure et qui peut dégénérer en une singularité.

## Principe de l'approche ADM

### Généralités

Ceci synthétise et complète la justification préalable à la méthode que nous avons donnée.

L'approche suppose un découpage (feuilletage) de l'espace-temps en hypersurfaces  $S$  spatiales  $3D$  (feuilles) dont les points sont définis par les coordonnées<sup>24</sup>  $x^i$ , chaque feuille étant étiquetée par sa coordonnée temporelle  $x^0 = t$ .

Les variables dynamiques sont le tenseur métrique  $3D$  de ces hypersurfaces spatiales  $g_{ij}(t, x^k)$  et un moment conjugué noté  $\pi^{ij}(t, x^k) = -g^{l/2} (K^{ij} - g^{ij}K)$  qui n'est pas directement la dérivée de  $g_{ij}$  par rapport à  $t$ , mais qui est étroitement relié à la seconde forme fondamentale (courbure extrinsèque). Il a été choisi pour des raisons d'interprétation géométrique.

Dans le chapitre 18, nous décrivons la forme simple que prend le tenseur  $K_{ij}$  qui est la rétroprojection sur l'hypersurface spatiale  $3D$  du tenseur  $K_{\mu\nu}$  de courbure extrinsèque (deuxième forme fondamentale), quand le vecteur normal à l'hypersurface est aussi "géodésique".

Ces variables dynamiques permettent d'écrire les équations du mouvement de la relativité générale sous la forme d'équations de Hamilton.

Compte tenu des symétries de ces variables (6 valeurs indépendantes au maximum par variable soit 12 pour les deux), on va réduire les degrés de liberté en imposant des contraintes.

Ces contraintes sont fournies par quatre multiplicateurs de Lagrange,  $N$  (un scalaire) qui est le "pas temporel" (Lapse) et  $N^i$  (un 3-vecteur) qui est le vecteur "d'entraînement"<sup>25</sup> (shift-vector).

Ces contraintes régissent la façon dont les feuilles sont assemblées pour générer l'espace-temps.

Nous avons vu qu'une indétermination sur les coordonnées et les équations y faisant référence liée à l'invariance par changement de coordonnées demeurerait mais pouvait être levée par le choix d'une jauge.

La décomposition standard ADM de  $4D$  en  $3D+1D$  choisit  $n^\mu$ , qui est le vecteur normalisé de type temps orthogonal aux feuilles (à  $t = \text{constante}$ ), comme unité de temps orienté vers le futur et définit  $N$  par :

$$n^\mu = N.t^{;\mu} = N.g^{\mu\nu}t_{;\nu} = N.g^{\mu\nu}\partial_\nu t. \quad (\text{A9-1})^{26}$$

Cette relation traduit l'orthogonalité de  $n^\mu$  aux hypersurfaces  $t = \text{constante}$  et donne la valeur de  $N$  puisque  $n^\mu n_\mu = -1$  et  $t$  étant une fonction on peut remplacer la dérivée covariante par la dérivée ordinaire.

---

24 Conformément aux usages, les indices latins comme  $i$  dénotent les indices spatiaux, ici  $i = 1, 2, 3$  et les indices grecs la métrique  $4D$ .

25 Il a été appelé ainsi dans le modèle de la rivière mais dans l'analyse ADM, compte tenu de son interprétation géométrique, on pourrait aussi bien l'appeler "vecteur de glissement"

26 L'orthogonalité de  $g^{\mu\nu}\partial_\nu t$  aux vecteurs de l'hypersurface définie par  $t = \text{cste}$  se déduit de:  $dt/d\lambda = 0$  sur toute courbe appartenant à l'hypersurface. Ceci donne  $dt/d\lambda = (\partial t/\partial x^\mu)(dx^\mu/d\lambda) = 0$ , produit scalaire du vecteur tangent à la courbe dans l'hypersurface, de composantes  $dx^\mu/d\lambda$  et de  $V^\nu = g^{\mu\nu}(\partial t/\partial x^\mu)$ . Ces vecteurs sont orthogonaux.

Le vecteur d'entraînement  $N^\mu$  est défini par

$$N^\mu = t^{\mu} - N \cdot n^\mu, \quad (\text{A9-2})$$

où

$$N^\mu n_\mu \equiv 0. \quad (\text{A9-3})$$

Ce qui fait que dans ce référentiel,  $N^\mu = (0, N^i)$

Si la métrique, euclidienne, dans notre cas, sur chaque feuille  $S$  est notée  $g_{ij}$  (définie comme rétroprojection de  $g_{\mu\nu}$  sur la feuille  $S$ ), la métrique spatio-temporelle résultante est

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ij} (dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt), \quad (\text{A9-4})$$

où  $g_{ij}$  est considérée comme la variable fondamentale, tandis que  $N$  et  $N^i$  sont les paramètres que nous avons définis précédemment.

Nous avons vu comment cela était utilisé dans les équations d'Einstein et comment il fallait aussi définir les dérivées pour spécifier les conditions initiales.

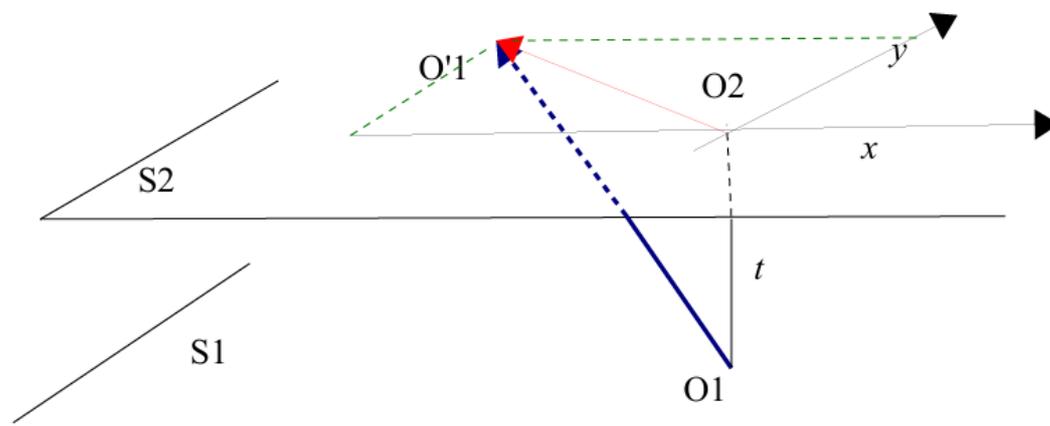
### Interprétation géométrique du vecteur d'entraînement $N^i$ et du pas temporel $N$

La définition donnée ci-dessus permet de montrer la signification géométrique de  $N$  et  $N^i$ .

Représentons deux hypersurfaces infiniment proches (feuilles S1 et S2) planes.

Le vecteur  $O1-O2$  représente le vecteur temps  $(\partial_t)^\mu$ . Dans la forme de Painlevé ce vecteur (en bleu) n'est pas normal aux hypersurfaces. Le vecteur normal est  $O1-O'1$ .

Le vecteur d'entraînement (en rouge) de composantes purement spatiales  $N^i$  est alors  $O2-O'1$  dont les composantes sont les projections sur les axes de coordonnées (ici  $x$  et  $y$ ).



**Figure A9-1.** Visualisation de la signification géométrique du vecteur d'entraînement.

Montrons que le scalaire  $N$  vaut  $(-g^{00})^{-1/2}$ . Par définition  $n^\mu$  vaut<sup>27</sup> :

$$n^\mu = \frac{g^{\mu\nu} \partial_\nu t}{[\sqrt{|(g^{\mu\nu} \partial_\nu t)(\partial_\mu t)|}]^{1/2}} = g^{\mu\nu} \partial_\nu t (-g^{00})^{-1/2}. \quad (A9-5)$$

En effet le gradient de la coordonnée  $t$  n'a qu'une composante non nulle<sup>28</sup>:  $n_\mu = \{-1, 0, 0, 0\}$ .

Le dénominateur de l'équation (A9-5) ci-dessus vaut donc  $[\sqrt{|(g^{00} \partial_0 t)(\partial_0 t)|}]^{1/2} = (-g^{00})^{1/2}$ .

En rapprochant (A9-5) de (A9-1) on voit que  $N = (-g^{00})^{-1/2}$ .

### Assemblage des feuilles spatiales 3D dans le formalisme ADM

Les feuilles sont à distance constante (mesurée sur le vecteur  $n^\mu$  normal à la feuille) grâce à l'utilisation de  $N$ , ce qui est adapté à une intégration numérique.

Au cours du parcours temporel, les feuilles subissent un glissement purement spatial par le vecteur d'entraînement de composantes  $N^i$ .

Ceci explicite la signification géométrique de  $N$  et  $N^i$ .

### Paramètres et équations essentielles de la décomposition 3+1 du champ d'Einstein

En reprenant le chapitre 3-2 de **Arnowitt R. Deser S. Misner C.W** (2004), avec ses notations, nous retenons:

$$g_{ij} \equiv {}^4g_{ij}, \quad N \equiv \frac{1}{\sqrt{-{}^4g^{00}}}, \quad N_i \equiv {}^4g_{0i} \quad (3.9a) ,$$

$$\pi^{ij} \equiv \sqrt{-{}^4g} ({}^4\Gamma_{pq}^0 - g_{pq} {}^4\Gamma_{rs}^0 g^{rs}) g^{ip} g^{jq} \quad (3.9b) .$$

Le moment conjugué  $\pi^{ij}$  dont la signification géométrique est naturelle est utilisé en lieu et place de la dérivée de  $g_{ij}$ . En effet, il est étroitement lié au tenseur contravariant de courbure extrinsèque et met en œuvre les dérivées spatiales de la métrique à travers les symboles de Christoffel d'indices spatiaux. Cela s'écrit

$$\pi^{ij} = -g^{1/2} (K^{ij} - g^{ij} K),$$

où  $K_{ij} = n_{(i;j)}$  est le tenseur de courbure extrinsèque<sup>29</sup> (deuxième forme fondamentale) et  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal à l'hypersurface.

Le préfixe indiciel haut 4 indique que nous faisons référence aux entités de l'espace-temps à 4 dimensions. Son absence indique que nous faisons référence aux entités spatiales à 3 dimensions, en particulier  $g^{ij}$  dans (3.9) est la métrique inverse de  $g_{ij}$ .

La métrique complète  ${}^4g_{\mu\nu}$  et  ${}^4g^{\mu\nu}$  peut s'écrire avec (3.9a)

$${}^4g_{00} = -(N^2 - N_i N^i), \quad (3.10)$$

<sup>27</sup> Comme  $t$  est une fonction, la dérivée covariante qui est égale à la dérivée ordinaire  $\partial_\nu t$ , est le gradient de  $t$ .

<sup>28</sup> La valeur  $-1$  pour la composante  $t$  de  $n_\mu$  résulte de l'orientation de  $n^\mu$  vers les  $t$  croissants et de  $n_\mu n^\mu = -1$ .

<sup>29</sup> C'est l'équation qui est donnée dans Arnowitt R. Deser S. Misner C.W (2004) p.9. Notons que cette équation est valide quand le quadrivecteur  $\mathbf{n}$  normal à l'hypersurface est aussi géodésique, ce que les auteurs semblent supposer. Voir chapitre 18 pour la définition du tenseur de courbure extrinsèque dans le cas général.

$$\text{où} \quad N^i = g^{ij}N_j, \quad {}^4g^{0i} = N^i/N^2, \quad {}^4g^{00} = -1/N^2, \quad (3.11a)$$

$${}^4g^{ij} = g^{ij} - (N^iN^j/N^2). \quad (3.11b)$$

$$\text{Une relation utile est:} \quad \sqrt{-{}^4g} = N \sqrt{g} . \quad (3.12)$$

En termes des éléments définis en (3.9), le Lagrangien de la relativité générale devient

$$L = \sqrt{-{}^4g} \quad {}^4R = g_{ij} \partial_i \pi^{ij} - N R^0 - N_i R^i - 2 \partial_i (\pi^{ij} N_j - \frac{1}{2} \pi N^i + \nabla^i N \sqrt{g}) , \quad (3.13)$$

où

$$R^0 \equiv -\sqrt{g} [{}^3R + g^{-1} (\frac{\pi^2}{2} - \pi^{ij} \pi_{ij})] \quad (3.14a) ,$$

$$R^i \equiv -2 \nabla_j \pi^{ij} \quad (3.14b) .$$

La composante  $R^0$  associée au temps (donc à l'énergie) est appelée la contrainte Hamiltonienne.

Notons que c'est un scalaire construit à partir du scalaire  $g$  dérivé de la métrique, du scalaire de Ricci 3D et de scalaires dérivés du moment conjugué  $\pi = g_{ij}\pi^{ij}$  et  $\pi_{ij}\pi^{ij}$ .

Les composantes  $R^i$  définissent un 3-vecteur spatial, construit à partir de  $\pi^{ij}$ , appelé la contrainte des moments spatiaux.

Ces éléments sont définis dans l'hypersurface spatiale.

On note que  $N$  et  $N_i$  sont des multiplicateurs de Lagrange dans le Lagrangien, contraignant celui-ci par 4 équations supplémentaires.

${}^3R$  est le scalaire de Ricci calculé à partir de la métrique spatiale  $g_{ij}$ , | symbolise la dérivée covariante utilisant cette métrique et les indices spatiaux sont élevés ou abaissés en utilisant  $g^{ij}$  et  $g_{ij}$  et  $\pi = \pi^i_i$ .

On autorise des dérivées spatiales du second ordre pour éliminer des termes tels que  $\Gamma^k_{ij}$ .

On peut vérifier que le Lagrangien au premier ordre<sup>30</sup> (3.13) permet de dériver les équations d'Einstein.

Dans la suite du document, les auteurs donnent une interprétation géométrique des variables dynamiques et construisent la forme canonique associée à la relativité générale avant de rentrer dans le détail de la résolution et de sa discussion.

Ceci n'étant pas nécessaire à notre propos nous ne le développerons pas.

---

<sup>30</sup> Dans le formalisme ADM on utilise la forme de Palatini (action ne comportant que des dérivées premières, ceci est explicité au chapitre 3-1.

## Détails du calcul ADM dans le cas de la forme cartésienne de Painlevé

Ce calcul est fait en utilisant un programme spécifique réalisé dans Mathematica 4 adapté du fichier "Painlevé\_4D\_ADM\_final.nb"

## Éléments de base utilisés dans le formalisme ADM pour la forme de Painlevé

### Initialisation des paramètres.

#### Définition du nombre de dimensions.

$n = 4.$

#### Définition des coordonnées.

$\text{coord} = \{t, x, y, z\}$

#### Définition de la métrique 4D.

```
metric = {{-1 + (2*m/(x^2+y^2+z^2)^(1/2)), x*((2*m)^(1/2))/(x^2+y^2+z^2)^(3/4),  
          y*((2*m)^(1/2))/(x^2+y^2+z^2)^(3/4), z*((2*m)^(1/2))/(x^2+y^2+z^2)^(3/4)},  
          {x*((2*m)^(1/2))/(x^2+y^2+z^2)^(3/4), 1, 0, 0}, {y*((2*m)^(1/2))/(x^2+y^2+z^2)^(3/4), 0, 1, 0},  
          {z*((2*m)^(1/2))/(x^2+y^2+z^2)^(3/4), 0, 0, 1}}
```

$$\left\{ \left\{ -1 + \frac{2m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{\sqrt{2} \sqrt{m} x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/4}}, \frac{\sqrt{2} \sqrt{m} y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/4}}, \frac{\sqrt{2} \sqrt{m} z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/4}} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \frac{\sqrt{2} \sqrt{m} x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/4}}, 1, 0, 0 \right\}, \left\{ \frac{\sqrt{2} \sqrt{m} y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/4}}, 0, 1, 0 \right\}, \left\{ \frac{\sqrt{2} \sqrt{m} z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/4}}, 0, 0, 1 \right\} \right\}$$

#### Calcul de la métrique inverse 4D.

```
inversemetric = Simplify[Inverse[metric]]
```

$$\left\{ \left\{ -1, \frac{\sqrt{2} \sqrt{m} x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/4}}, \frac{\sqrt{2} \sqrt{m} y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/4}}, \frac{\sqrt{2} \sqrt{m} z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/4}} \right\}, \right. \\ \left\{ \frac{\sqrt{2} \sqrt{m} x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/4}}, \frac{-2m x^2 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{2m x y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{2m x z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right\}, \\ \left\{ \frac{\sqrt{2} \sqrt{m} y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/4}}, -\frac{2m x y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-2m y^2 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{2m y z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right\}, \\ \left. \left\{ \frac{\sqrt{2} \sqrt{m} z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/4}}, -\frac{2m x z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{2m y z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-2m z^2 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right\} \right\}$$

## Calcul des symboles de Christoffel 4D

```
affine := affine = Simplify[Table[(1/2) * Sum[(inversemetric[[i, s]]) *  
  (D[metric[[s, j]], coord[[k]] ) +  
  D[metric[[s, k]], coord[[j]] ] - D[metric[[j, k]], coord[[s]] ]), {s, 1, n}],  
  {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n} ]
```

Edition de ces symboles de Christoffel, on rappelle que les indices varient de 1 à 4 (1 est le temps, 2,3,4 respectivement x, y, z). Par ailleurs le premier indice est l'indice haut:  $\Gamma[i, j, k]$  se lit  $\Gamma_{jk}^i$

$\Gamma[2, 4, 4]$	$\frac{m x (2 x^2 + 2 y^2 - z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$	$\Gamma[1, 1, 1]$	$\frac{\sqrt{2} m^{3/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/4}}$
$\Gamma[3, 1, 1]$	$\frac{m y (-2 m + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$	$\Gamma[1, 2, 1]$	$\frac{m x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$
$\Gamma[3, 2, 1]$	$-\frac{\sqrt{2} m^{3/2} x y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{9/4}}$	$\Gamma[1, 2, 2]$	$\frac{\sqrt{m} (x^2 - 2 (y^2 + z^2))}{\sqrt{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{7/4}}$
$\Gamma[3, 2, 2]$	$\frac{m y (-x^2 + 2 (y^2 + z^2))}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$	$\Gamma[1, 3, 1]$	$\frac{m y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$
$\Gamma[3, 3, 1]$	$-\frac{\sqrt{2} m^{3/2} y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{9/4}}$	$\Gamma[1, 3, 2]$	$\frac{3 \sqrt{m} x y}{\sqrt{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{7/4}}$
$\Gamma[3, 3, 2]$	$-\frac{3 m x y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$	$\Gamma[1, 3, 3]$	$\frac{\sqrt{m} (-2 x^2 + y^2 - 2 z^2)}{\sqrt{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{7/4}}$
$\Gamma[3, 3, 3]$	$\frac{m y (2 x^2 - y^2 + 2 z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$	$\Gamma[1, 4, 1]$	$\frac{m z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$
$\Gamma[3, 4, 1]$	$-\frac{\sqrt{2} m^{3/2} y z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{9/4}}$	$\Gamma[1, 4, 2]$	$\frac{3 \sqrt{m} x z}{\sqrt{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{7/4}}$
$\Gamma[3, 4, 2]$	$-\frac{3 m x y z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$	$\Gamma[1, 4, 3]$	$\frac{3 \sqrt{m} y z}{\sqrt{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{7/4}}$
$\Gamma[3, 4, 3]$	$-\frac{3 m y^2 z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$	$\Gamma[1, 4, 4]$	$\frac{\sqrt{m} (-2 x^2 - 2 y^2 + z^2)}{\sqrt{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{7/4}}$
$\Gamma[3, 4, 4]$	$\frac{m y (2 x^2 + 2 y^2 - z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$	$\Gamma[2, 1, 1]$	$\frac{m x (-2 m + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$
$\Gamma[4, 1, 1]$	$\frac{m z (-2 m + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$	$\Gamma[2, 2, 1]$	$-\frac{\sqrt{2} m^{3/2} x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{9/4}}$
$\Gamma[4, 2, 1]$	$-\frac{\sqrt{2} m^{3/2} x z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{9/4}}$	$\Gamma[2, 2, 2]$	$\frac{m x (-x^2 + 2 (y^2 + z^2))}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$
$\Gamma[4, 2, 2]$	$\frac{m z (-x^2 + 2 (y^2 + z^2))}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$	$\Gamma[2, 3, 1]$	$-\frac{\sqrt{2} m^{3/2} x y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{9/4}}$
$\Gamma[4, 3, 1]$	$-\frac{\sqrt{2} m^{3/2} y z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{9/4}}$	$\Gamma[2, 3, 2]$	$-\frac{3 m x^2 y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$
$\Gamma[4, 3, 2]$	$-\frac{3 m x y z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$	$\Gamma[2, 3, 3]$	$\frac{m x (2 x^2 - y^2 + 2 z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$
$\Gamma[4, 3, 3]$	$\frac{m z (2 x^2 - y^2 + 2 z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$	$\Gamma[2, 4, 1]$	$-\frac{\sqrt{2} m^{3/2} x z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{9/4}}$
$\Gamma[4, 4, 1]$	$-\frac{\sqrt{2} m^{3/2} z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{9/4}}$	$\Gamma[2, 4, 2]$	$-\frac{3 m x^2 z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$
$\Gamma[4, 4, 2]$	$-\frac{3 m x z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$	$\Gamma[2, 4, 3]$	$-\frac{3 m x y z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$
$\Gamma[4, 4, 3]$	$-\frac{3 m y z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$		
$\Gamma[4, 4, 4]$	$\frac{m z (2 x^2 + 2 y^2 - z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$		

Calcul de  $g$ , racine carrée de l'opposé du déterminant de la métrique 4D, définition de la métrique spatiale euclidienne 3D  $g_{ij}$ , introduction de  $scalar$ , scalaire de Ricci 4D qui est nul (solution dans le vide), et du scalaire de Ricci de l'hypersurface spatiale 3D euclidienne qui vaut aussi 0.

```
g = Simplify[(-Det[metric])^(1/2)]
gij = Table[metric[[i + 1, j + 1]], {i, 1, n - 1}, {j, 1, n - 1}]
scalar = 0
scalarspace = 0
```

$g = 1$

$g_{ij} = \{\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}\}$

$scalar = 0$

$scalarspace = 0$

*l'espace est euclidien.*

*Le scalaire de Ricci est nul (espace vide)*

*Le scalaire de Ricci de la partie spatiale euclidienne est nul*

Calcul de la racine carrée du déterminant de l'espace 3D  $g_{ij}$  et du moment conjugué  $\pi^i$

$$\pi^{ij} \equiv \sqrt{-^4g} (^4\Gamma_{pq}^0 - g_{pq} ^4\Gamma_{rs}^0 g^{rs}) g^{ip} g^{jq}$$

gspace = Simplify[Sqrt[Det[gij]]]                      *on calcule la racine carrée du déterminant*  
 invgij = Simplify[Inverse[gij]]

```
momentconj =
Simplify[
Table[
g *
Sum[
(affine[[1, p + 1, q + 1]] -
gij[[p, q]] * Sum[affine[[1, k + 1, l + 1]] invgij[[k, l]], {k, 1, n - 1}, {l, 1, n - 1}]) *
invgij[[i, p]] * invgij[[j, q]], {p, 1, n - 1}, {q, 1, n - 1}, {i, 1, n - 1}, {j, 1, n - 1}]]
```

gspace = 1    *Le déterminant de la métrique spatiale vaut 1 de façon évidente.*

Invgij = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}    *La métrique euclidienne est égale à son inverse*

Le moment conjugué  $\pi^i$  vaut:

$$\left\{ \left\{ \frac{\sqrt{m} (4x^2 + y^2 + z^2)}{\sqrt{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{7/4}}, \frac{3\sqrt{m}xy}{\sqrt{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{7/4}}, \frac{3\sqrt{m}xz}{\sqrt{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{7/4}}, \right. \right.$$

$$\left. \left\{ \frac{3\sqrt{m}xy}{\sqrt{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{7/4}}, \frac{\sqrt{m}(x^2 + 4y^2 + z^2)}{\sqrt{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{7/4}}, \frac{3\sqrt{m}yz}{\sqrt{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{7/4}}, \right. \right.$$

$$\left. \left. \left\{ \frac{3\sqrt{m}xz}{\sqrt{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{7/4}}, \frac{3\sqrt{m}yz}{\sqrt{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{7/4}}, \frac{\sqrt{m}(x^2 + y^2 + 4z^2)}{\sqrt{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{7/4}} \right\} \right\}$$

Calcul des symboles de Christoffel de l'hypersurface spatiale 3D et du Hamiltonien  $H = R^0$ . Notons que le scalaire de Ricci spatial  ${}^3R$  est nul (espace euclidien)

$$R^0 \equiv -\sqrt{g} [{}^3R + g^{-1} (\frac{\pi^2}{2} - \pi^i \pi_{ij})] \quad (3.14a)$$

```

affinespace = Simplify[Table[(1/2) * Sum[(invgij[[i, s]]) *
  (D[gij[[s, j]], coord[[k+1]]] +
  D[gij[[s, k]], coord[[j+1]]] - D[gij[[j, k]], coord[[s+1]]]), {s, 1, n-1}],
  {i, 1, n-1}, {j, 1, n-1}, {k, 1, n-1}]
H =
Simplify[
-gspace *
  (scalarspace + (gspace^(-2)) * (((Sum[metric[[i+1, j+1]] momentconj[[i, j]], {i, 1, n-1}, {j, 1, n-1}])^2) / 2) -
  Sum[momentconj[[p, s]] Sum[momentconj[[k, l]] metric[[k+1, p+1]] metric[[l+1, s+1]], {k, 1, n-1}, {l, 1, n-1}],
  {p, 1, n-1}, {s, 1, n-1}]]

```

```

affinespace = {{{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}, {{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0,
0, 0}}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}

```

H = 0

*Le Hamiltonien est identiquement nul*

Calcul de  $R^i = -2\pi^{ij}_{;j}$  qui est la divergence covariante en métrique 3D spatiale  $g_{ij}$ . La métrique spatiale étant euclidienne, les dérivées covariantes se réduisent à des dérivées ordinaires.

```

Divmoment =
Simplify[
Table[
  Sum[(D[momentconj[[i, j]], coord[[j+1]]] + Sum[affinespace[[i, j, l]] momentconj[[l, j]], {l, 1, n-1}] +
  Sum[affinespace[[j, j, k]] momentconj[[k, i]], {k, 1, n-1}]), {j, 1, n-1}], {i, 1, n-1}]

```

Divmoment = {0, 0, 0}

$R^i = -2\pi^{ij}_{;j}$  est identiquement nul

On peut aussi calculer l'équation (3.15a) citée précédemment qui donne  $\partial_t g_{ij}$  qui donne un résultat nul, comme on pouvait s'y attendre puisque la métrique ne dépend pas de  $t$ .