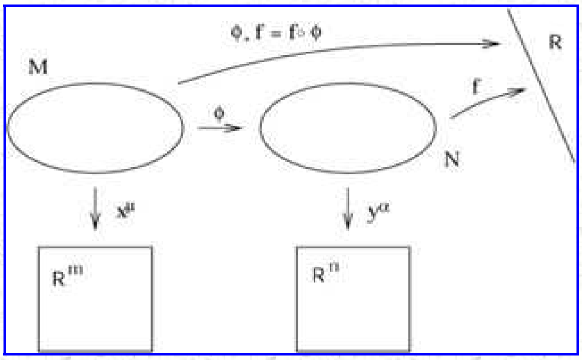
http://pancake.uchicago.edu/~carroll/notes/ : J. Fric endosse toute responsabilité pour les erreurs que sa traduction (qui n'a pas été vérifiée par l'auteur) aurait pu ajouter. En cas de doute, veuillez vous rapporter à la version originale.

5. Compléments géométriques

Introduction

Ayant compris comment les lois de la physique peuvent être adaptées à un espace courbe, il est indéniablement tentant de nous intéresser aux applications. Cependant, quelques compléments géométriques nous sont indispensables pour nous permettre d'aller plus avant. Dans le chapitre 2, nous avons introduit les applications entre variétés avec leurs lois de composition. Nous nous intéressons maintenant à l'utilisation de ces applications pour transporter un champ de tenseurs d'une variété à une autre. Considérons deux variétés *M* et *N*, éventuellement de dimensions différentes munies respectivement de systèmes de coordonnées x^{μ} et y_{α}. Supposons une application Φ: $M \rightarrow N$ et une fonction $f : N \rightarrow \mathbf{R}$.



Rétro projection d'une fonction

Nous pouvons composer de façon évidente Φ avec *f* pour définir une application $(f \circ \Phi) : M \rightarrow \mathbf{R}$, qui est simplement une fonction sur *M*. Une telle construction est très utilisée et un nom lui a été attribué: Nous définissons la **rétro projection** de *f* par Φ, notée $\Phi_* f$, par :

$$\phi_* f = (f \circ \phi) \ . \tag{5.1}$$

Le nom est explicite, car l'opérateur Φ_* transpose en amont la fonction *f* de *N* à *M*.

Nous pouvons rétro projeter des fonctions, mais nous ne pouvons pas les projeter. Si nous avons une fonction $g : M \rightarrow \mathbf{R}$, il n'y a pas de moyen de composer *g* avec Φ pour créer une fonction sur *N*, les flèches ne correspondent pas.

Projection d'un Vecteur

Mais rappelons-nous qu'un vecteur peut être considéré comme un opérateur de dérivation qui s'applique sur des fonctions régulières (continues et infiniment dérivables) et produit des nombres réels. Ceci nous permet de définir la **projection** d'un vecteur, si *V*(*p*) est un vecteur en un point *p* sur *M*, nous définissons le vecteur projeté $\Phi^* V$ au point $\Phi(p)$ sur *N* en définissant son action sur les fonctions de *N* :

$$(\phi^* V)(f) = V(\phi_* f) \ . \tag{5.2}$$

Donc projeter un champ de vecteurs, c'est faire agir $\Phi^* V$ sur une fonction quelconque, c'est donc l'action de *V* sur la rétro projection de la fonction.

Relations entre les composantes d'un vecteur avant et après projection

C'est un peu abstrait, et nous allons essayer de concrétiser la description. Nous savons qu'une base de vecteurs sur *M* est donnée par l'ensemble des dérivées partielles $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, et une base sur *N* est donnée par l'ensemble des dérivées partielles $\partial_\alpha = \partial/\partial y^\alpha$. Donc nous voulons mettre en relation les composantes de $V = V^\mu\partial_\mu$ avec ceux de $(\Phi^*V) = (\Phi^*V)^\alpha.\ \partial_\alpha$ Nous pouvons trouver la relation recherchée en appliquant le vecteur projeté à une fonction de test et en utilisant la règle de chaînage (2.3) :

$$\begin{aligned}(\phi^*V)^\alpha\partial_\alpha f &= V^\mu\partial_\mu(\phi_* f)\\ &= V^\mu\partial_\mu(f\circ\phi)\\ &= V^\mu\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\partial_\alpha f\ .\end{aligned} \tag{5.3}$$

Matrice de projection

Cette formule simple nous incite à représenter l'opération de projection Φ^* par un opérateur matriciel, $(\Phi^*V)^\alpha = (\Phi^*)^\alpha{}_\mu V^\mu$, la matrice étant définie par :

$$(\phi^*)^\alpha{}_\mu = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\ . \tag{5.4}$$

Projection et changement de coordonnées

La transformation d'un vecteur par projection, ressemble à s'y méprendre à un changement de coordonnées. C'est en fait une généralisation, et quand *M* et *N* sont en fait la même variété c'est identique, mais ne nous y trompons pas, en général μ et α ont des valeurs permises différentes et il n'y a aucune raison pour que la matrice $\partial y^\alpha/\partial x^\mu$ soit inversible. C'est un exercice instructif de vérifier qu'alors que nous pouvons projeter des vecteurs de *M* vers *N* (par une application Φ: $M \to N$), nous ne pouvons pas en général les rétroprojeter, essayez d'imaginer un procédé pour cela, alors la vanité de l'entreprise vous apparaîtra dans sa plénitude.

Rétro projection de formes monolinéaires

Comme les formes monolinéaires sont les duaux des vecteurs, cela ne vous surprendra pas d'apprendre que les formes monolinéaires peuvent être rétro projetées mais en général pas projetées. Pour le montrer, rappelons-nous que les formes monolinéaires sont des applications de vecteurs vers des nombres réels. La rétro projection $\Phi_*\omega$ d'une forme monolinéaire ω sur *N* peut être définie par son action sur un vecteur *V* sur *M*, en l'égalant avec l'action de ω lui-même sur la projection de *V :*

$$(\phi_*\omega)(V) = \omega(\phi^*V)\ . \tag{5.5}$$

Rappelons que c'est simple description matricielle de l'opérateur de rétro projection sur les formes $(\Phi_*)_\mu = (\Phi_*)_\mu{}^\alpha\omega_\alpha$, que nous pouvons établir en utilisant la règle de chaînage.

Matrice de rétro projection

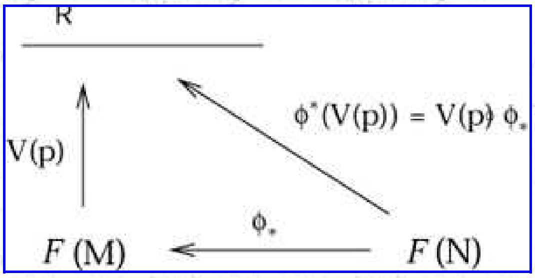
Elle est donnée par :

$$(\phi_*)_\mu{}^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \,. \tag{5.6}$$

C'est la même matrice que pour la projection (5.4), mais bien sur, c'est un index différent qui est concerné quand on l'applique pour rétro projeter les formes monolinéaires.

Objets concernés par les (rétro)projections

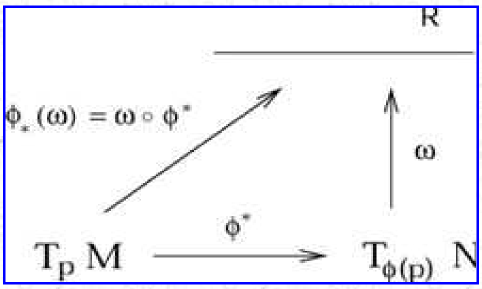
Il est facile de comprendre pourquoi les rétroprojections et les projections s'appliquent sur certains objets et pas d'autres, par l'argument suivant. Si nous appelons $\mathcal{F}(M)$ l'ensemble des fonctions régulières (continues, dérivables) sur M, alors un vecteur $V(p)$ en un point p de M (élément de l'espace tangent T_pM) peut être représenté comme un opérateur de $\mathcal{F}(M)$ vers $\mathbf{R}$. Mais nous savons que l'opérateur de rétro projection sur les fonctions applique $\mathcal{F}(N)$ sur $\mathcal{F}(M)$ (comme Φ lui-même applique M sur N, mais dans l'autre sens). Donc nous pouvons définir la projection Φ* opérant sur les vecteurs comme résultant d'une composition des applications, comme nous avions défini initialement la rétro projection des fonctions.



De même, si T_qN est l'espace tangent à un point q sur N, Alors une forme monolinéaire ω en q (élément de l'espace cotangent $T_q{}^*N$) peut être représenté par un opérateur de T_qN vers $\mathbf{R}$.

La rétro projection vue comme une combinaison d'applications

Comme la projection Φ* applique T_pM sur $T_{\Phi(p)N}$, la rétro projection Φ_* d'une forme monolinéaire peut être interprétée comme une simple composition d'applications.



Si cela ne vous aide pas, ne somatisez pas, mais gardez en mémoire ce qui existe et ce qui n'existe pas, les concepts sont simples, c'est juste la mémorisation de ce que font les applications qui prête à confusion, tant tout ceci se ressemble.

Rétro projection de formes multilinéaires

Rappelons qu'un tenseur (0, l) avec l indices et pas d'exposant est une forme multilinéaire appliquant l vecteurs sur $\mathbf{R}$. Nous pouvons donc rétro projeter non seulement des formes linéaires mais des tenseurs munis d'un nombre quelconque d'indices. La définition est simplement l'action du tenseur original sur les vecteurs projetés.

$$(\phi_* T)(V^{(1)}, V^{(2)}, \ldots, V^{(l)}) = T(\phi^* V^{(1)}, \phi^* V^{(2)}, \ldots, \phi^* V^{(l)}) \,, \tag{5.7}$$

où $T_{\alpha 1 \cdots \alpha l}$ est un tenseur (0, l) sur N.

Projection d'un tenseur contravariant de rang quelconque

De même nous pouvons projeter un tenseur de type (k, 0), $S^{\mu 1 \cdots \mu k}$ quelconque en l'appliquant sur les formes linéaires rétro projetées :

$$(\phi^* S)(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(k)}) = S(\phi_* \omega^{(1)}, \phi_* \omega^{(2)}, \ldots, \phi_* \omega^{(k)}) \,. \tag{5.8}$$

Matrice de rétro projection de formes multilinéaires

Heureusement, les matrices représentant la projection (5.4) et la rétro projection (5.6) peuvent se généraliser à des tenseurs de rang plus élevé simplement en associant une matrice à chaque index, alors pour la rétro projection d'un tenseur (0, l), nous avons :

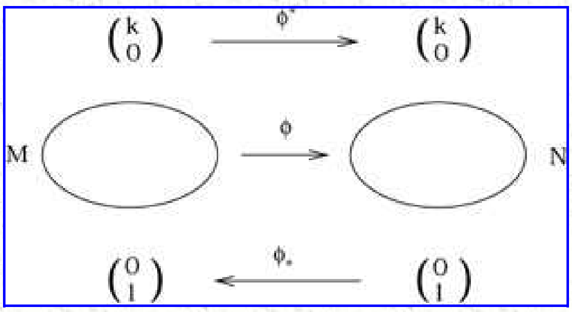
$$(\phi_* T)_{\mu_1 \cdots \mu_l} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial y^{\alpha_l}}{\partial x^{\mu_l}} T_{\alpha_1 \cdots \alpha_l} \,, \tag{5.9}$$

Matrice de projection de tenseurs contravariants de rang quelconque

Tandis que pour la projection d'un tenseur (k, 0) nous avons :

$$(\phi^* S)^{\alpha_1 \cdots \alpha_k} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}} S^{\mu_1 \cdots \mu_k} \,. \tag{5.10}$$

Le diagramme complet est alors :



Remarquons que les tenseurs mixtes ne peuvent généralement ni être projetés, ni être rétro projetés.

Exemple d'application

Ce mécanisme devient moins impressionnant, quand on le met en œuvre sur un exemple simple. Un cas biblique d'application entre deux variétés, quand l'une *M* est un sous ensemble de l'autre *N,* consiste a faire correspondre à un élément de *M* le même élément dans *N*.

Considérons une sphère S^2 incluse dans R^3, comme lieu des points à une distance unitaire d'un point appelé centre. Choisissons les coordonnées $x^\mu = (\theta,\Phi)$ sur $M = S^2$ et $y_\alpha = (x, y, z)$ sur $N = R^3$, l'application Φ: $M \to N$ est donnée par :

$$\phi(\theta, \phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)\ . \tag{5.11}$$

Précédemment nous avons considéré la métrique $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ sur R^3, , et indiqué qu'elle induit une métrique $d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\Phi^2$ sur S^2, en reportant simplement (5.11) dans cette métrique Euclidienne sur R^3. Nous n'avions pas justifié cette assertion en ces temps-là, mais maintenant nous allons le faire. (Ce serait plus naturel, si nous travaillions en coordonnées sphériques sur R^3, mais ici, la difficulté est riche d'enseignement). La matrice des dérivées partielles est donnée par :

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{5.12}$$

La métrique sur S^2 est obtenue simplement en y rétro projetant la métrique de R^3

$$\begin{aligned} (\phi^* g)_{\mu\nu} &= \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}\ , \end{aligned} \tag{5.13}$$

Résultat que vous pouvez vérifier. Certes le résultat est le même que si nous avions opéré une banale substitution, mais nous savons pourquoi. Nous avons manifesté la plus grande prudence quant à l'utilisation d'une application Φ: $M \to N$ pour projeter ou rétro projeter certains objets et pas d'autres. La raison de non réversibilité vient de ce que Φ peut ne pas être inversible.

Difféomorphismes

Si Φ est inversible et que et Φ et Φ^{-1} sont régulières, ce que nous supposons toujours implicitement, alors cela définit un difféomorphisme entre *M* et *N*. Dans ce cas *M* et *N* représentent une même variété abstraite. La beauté des difféomorphismes est que nous pouvons utiliser et Φ et Φ^{-1} pour porter des tenseurs de *M* vers *N*.

Ceci nous permet de définir les (rétro)projections de tenseurs quelconques. En particulier pour un champ de tenseurs (k, l) $T^{\mu 1 \cdots \mu k}{}_{\nu 1 \cdots \nu l}$ sur *M*, nous définirons la projection par :

$$(\phi^* T)(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \ldots, V^{(l)}) = T(\phi_* \omega^{(1)}, \ldots, \phi_* \omega^{(k)}, [\phi^{-1}]^* V^{(1)}, \ldots, [\phi^{-1}]^* V^{(l)})\ , \tag{5.14}$$

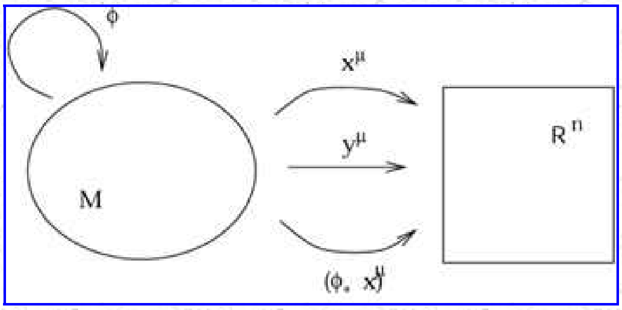
où les ω (i) sont les formes monolinéaires sur *N* et les $V^{(i)}$ sont les vecteurs sur *N*. Pour les composantes cela donne :

$$(\phi^* T)^{\alpha_1 \cdots \alpha_k}{}_{\beta_1 \cdots \beta_l} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial y^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial y^{\beta_l}} T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l}\ . \tag{5.15}$$

L'apparition de la matrice inverse $\partial x^{\nu}/\partial y^{\beta}$ est légitime car Φ est inversible. Nous pourrions aussi définir la rétro projection de manière évidente, mais il est inutile d'écrire des équations différentes puisque le rétro projection Φ_* est la même que la projection via l'application inverse $[\Phi^{-1}]^*$.

Difféomorphismes et changement de coordonnées

Nous sommes maintenant prêt pour expliquer la différence entre les difféomorphismes et les transformations de coordonnées. C'est en fait deux manières de parvenir au même résultat. Les difféomorphismes étant des "transformations de coordonnées actives" alors que les transformations de coordonnées classiques sont "passives". Considérons urne variété M de dimension n avec des fonctions de coordonnées $x^{\mu} : M \to \mathrm{R}^n$. Pour changer de coordonnées, nous pouvons soit simplement introduire de nouvelles fonctions $y^{\mu} : M \to \mathrm{R}^n$ (" On garde la variété fixe et on change l'application de coordonnées"), où nous pouvons tout aussi bien définir un difféomorphisme Φ: $M \to M$, dont les coordonnées seront les rétroprojections $(\Phi_* x)^{\mu} : M \to \mathrm{R}^n$ ("projeter les points sur la variété et en évaluer les nouvelles coordonnées "). En ce sens, (5.15) est réellement une transformation tensorielle, juste représentée d'une autre manière.



Le difféomorphisme pour comparer les tenseurs en deux points différents

Comme un difféomorphisme nous permet de (rétro)projeter des tenseurs quelconques, il permet de comparer d'une autre manière des tenseurs en différents points de la variété. Soit un difféomorphisme Φ : $M \to M$ et un champ de tenseurs $T^{\mu 1 \dots \mu k}{}_{\nu 1 \dots \nu l}(x)$, nous pouvons évaluer la différence entre la valeur du tenseur en un point p et sa valeur en $\Phi(p)$ rétro projetée en p : $\Phi_* [T^{\mu 1 \dots \mu k}{}_{\nu 1 \dots \nu l}(\Phi(p))]$.

Une nouvelle dérivée se prépare

Ceci suggère que nous pouvons définir un autre type de dérivée sur les champs de tenseurs, qui caractériserait le taux de variation du tenseur lorsque transporté par un difféomorphisme.

Famille de difféomorphismes

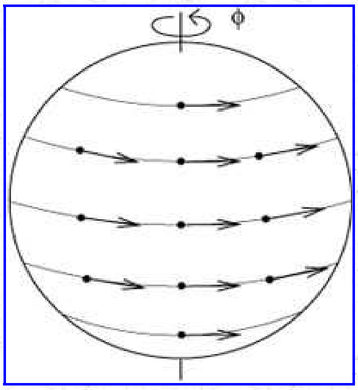
Pour cela pourtant un difféomorphisme discret unique est insuffisant, nous nécessitons une famille mono paramétrée de difféomorphismes, Φt. Cette famille peut être interprétée comme une application régulière de $\mathbf{R} \times M \to M$, telle que pour chaque $t \in \mathbf{R}$, Φt est un difféomorphisme et $(\Phi s) \circ (\Phi t) = \Phi s{+}t$. Remarquons que cette dernière condition implique que $\Phi 0$ est l'élément neutre.

Les familles de difféomorphismes mono paramétrées peuvent être interprétée comme issues de champs de vecteurs et vice versa. Si on considère l'action de la famille entière Φt sur le point p, il est clair que cela peut être représenté par une courbe dans M, et comme cela est indépendant du point, appliqué à tous les points, toutes ces courbes vont remplir la variété (à l'exception de singularités éventuelles ou l'image peut être un point).

Champs de vecteurs tangents aux courbes de familles de difféomorphisme

Nous pouvons définir un champ de vecteurs $V^\mu (x)$ comme l'ensemble des vecteurs tangents à chacune de ces courbes chaque point évalué à $t = 0$.

Un exemple sur S^2 est donné par le difféomorphisme $\Phi t(\theta,\Phi) = (\theta,\Phi + t)$.



Nous pouvons inverser la construction et définir une famille mono paramétrée de difféomorphismes depuis n'importe quel champ de vecteurs.

Courbes intégrales

Soit un champ de vecteurs $V^\mu (x)$, nous définissons les **courbes intégrales** du champ de vecteurs comme étant les courbes qui satisfont à l'équation :

$$\frac{dx^\mu}{dt} = V^\mu \tag{5.16}$$

Remarquons que cette équation familière est ici à utiliser à l'envers, car le champ de vecteurs est donné, et cette équation définit une courbe à lui associer. Les solutions de (5.16) existent sous réserve de se comporter régulièrement et de ne pas "percuter" les limites de la variété, vous en trouverez la démonstration, qui consiste à trouver le système de coordonnées approprié dans lequel le problème se ramène au théorème fondamental des équations différentielles classiques, dans les manuels de géométrie différentielles.

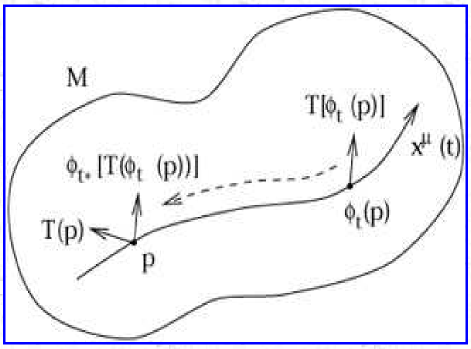
Générateur de difféomorphisme

Nos difféomorphismes Φt représentent " le flux sur les courbes intégrales" et le champ de vecteurs est appelé le **générateur** du difféomorphisme (ces courbes intégrales sont largement utilisées en physique, mais pas sous ce nom). Les lignes de flux magnétique matérialisées par de la limaille de fer entre les pôles d'un aimant, sont simplement les courbes intégrales du champ magnétique de vecteurs **B**.

Etant donné un champ de vecteurs $V^{\mu}(x)$, alors nous avons une famille de difféomorphismes paramétrées par t, et il est naturel d'évaluer les paramètres de la variation d'un tenseur lorsqu'il est déplacé le long d'une courbe intégrale. Pour chaque t nous pouvons définir cette variation par :

$$\Delta_t T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\mu_l}(p) = \phi_{t*}[T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\mu_l}(\phi_t(p))] - T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\mu_l}(p) \ . \tag{5.17}$$

Remarquons que les deux termes du membre de droite sont des tenseurs en p.



Dérivée de Lie

Nous définirons donc la **dérivée de Lie** du tenseur le long du champ de vecteurs par :

$$\pounds_V T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\mu_l} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\Delta_t T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\mu_l}}{t}\right) \ . \tag{5.18}$$

La dérivée de Lie est une application d'un champ de tenseurs (k, l) sur un champ de tenseurs (k, l) qui est manifestement indépendant des coordonnées. De par sa définition, dérivée classique des fonctions des composantes d'un tenseur, cette dérivée est manifestement linéaire.

$$\pounds_V(aT + bS) = a\pounds_V T + b\pounds_V S \ , \tag{5.19}$$

Et obéit à la règle de Leibniz,

$$\pounds_V(T\otimes S) = (\pounds_V T)\otimes S + T\otimes(\pounds_V S) \ , \tag{5.20}$$

Où S et T sont des tenseurs et a et b des constantes. La dérivée de Lie, est en fait une notion plus primitive que celle de la dérivée covariante, car elle ne requiert aucune spécification de connexion (bien qu'elle requière un champ de vecteurs tout de même). Il est facile de voir qu'elle se ramène à une dérivée classique sur les fonctions.

$$\pounds_V f = V(f) = V^\mu \partial_\mu f \ . \tag{5.21}$$

Pour discuter de l'action de la dérivée de Lie sur les tenseurs en des termes que nous connaissons, nous devons choisir un système de coordonnées adapté à notre problème. Nous allons travailler en coordonnées x^μ où x^1 est le paramètre le long de la courbe intégrale (les autres coordonnées peuvent être choisies arbitrairement). Alors le champ de vecteurs prend la forme $V = \partial/\partial x^1$; ce qui donne les composantes $V^\mu = (1, 0, 0,..., 0)$. Le côté magique de ce système de coordonnées est qu'un difféomorphisme par t produit une transformation de coordonnées de x^μ vers $y^\mu = (x^1 + t, x^2,..., x^n)$. Donc d'après (5.6) la matrice de rétro projection est simplement :

$$(\phi_{t*})_\mu{}^\nu = \delta_\mu^\nu \ , \tag{5.22}$$

Et les composantes du tenseur rétro projeté de Φ (p) à p sont simplement :

$$\phi_{t*}[T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\mu_l}(\phi_t(p))] = T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\mu_l}(x^1 + t, x^2, \ldots, x^n) \ . \tag{5.23}$$

Dans ce système de coordonnées la dérivée de Lie devient :

$$\pounds_V T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\mu_l} = \frac{\partial}{\partial x^1} T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\mu_l} \ , \tag{5.24}$$

Et en particulier la dérivée du champ de vecteurs U^μ (x) est :

$$\pounds_V U^\mu = \frac{\partial U^\mu}{\partial x^1} \ . \tag{5.25}$$

Bien que cette expression ne soit manifestement pas covariante, nous savons que le commutateur $[V, U]$ est un tenseur bien défini, et dans ce système de coordonnées :

$$\begin{aligned} [V, U]^\mu &= V^\nu \partial_\nu U^\mu - U^\nu \partial_\nu V^\mu \\ &= \frac{\partial U^\mu}{\partial x^1} \ . \end{aligned} \tag{5.26}$$

Donc la dérivée de Lie de U respectivement à V, a les mêmes composantes dans ce système de coordonnées que le commutateur de V et U, et comme ce sont deux vecteurs, ceci doit être vrai dans n'importe quel système de coordonnées :

$$\pounds_V U^\mu = [V, U]^\mu \ . \tag{5.27}$$

Comme conséquence immédiate nous avons $\pounds_V S = - \pounds_W V$. C'est à cause de (5.27) que le commutateur est quelquefois appelé "les crochets de Lie" Cherchons maintenant comment $\pounds_V$ agit sur une forme monolinéaire ω_μ. Commençons par son action sur le scalaire $\omega_\mu U^\mu$ pour un champ quelconque de vecteurs U^μ. Utilisons d'abord le fait que la dérivée de Lie respectivement à un champ de vecteurs se réduit à l'action du vecteur lui-même quand elle est appliquée sur un scalaire :

$$\begin{aligned} \pounds_V(\omega_\mu U^\mu) &= V(\omega_\mu U^\mu) \\ &= V^\nu \partial_\nu(\omega_\mu U^\mu) \\ &= V^\nu(\partial_\nu \omega_\mu)U^\mu + V^\nu \omega_\mu(\partial_\nu U^\mu) \ . \end{aligned} \tag{5.28}$$

Utilisons la règle de Leibniz sur le scalaire original :

$$\begin{aligned} \pounds_V(\omega_\mu U^\mu) &= (\pounds_V \omega)_\mu U^\mu + \omega_\mu(\pounds_V U)^\mu \\ &= (\pounds_V \omega)_\mu U^\mu + \omega_\mu V^\nu \partial_\nu U^\mu - \omega_\mu U^\nu \partial_\nu V^\mu \ . \end{aligned} \tag{5.29}$$

Égalons ces deux expressions et comme elles doivent être vraies pour U^μ quelconque, nous voyons que :

$$\pounds_V \omega_\mu = V^\nu \partial_\nu \omega_\mu + (\partial_\mu V^\nu)\omega_\nu \ , \tag{5.30}$$

Ce qui (conformément à la définition d'un commutateur) est complètement covariant, même si cela ne saute pas aux yeux

La dérivée de Lie d'un champ de tenseurs quelconque est covariante

Par une procédure semblable, nous pouvons définir la dérivée de Lie d'un champ de tenseurs quelconque. Le résultat peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\pounds_V T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} &= V^\sigma\partial_\sigma T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \\ &\quad -(\partial_\lambda V^{\mu_1})T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} - (\partial_\lambda V^{\mu_2})T^{\mu_1\lambda\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} - \cdots \\ &\quad +(\partial_{\nu_1} V^{\lambda})T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_l} + (\partial_{\nu_2} V^{\lambda})T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\lambda\cdots\nu_l} + \cdots\end{aligned} \tag{5.31}$$

En dépit des apparences, cette expression est covariante. Il serait pourtant rassurant d'avoir une autre formulation de cette expression où cette covariance serait manifeste. Il apparaît que nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\pounds_V T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} &= V^\sigma\nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \\ &\quad -(\nabla_\lambda V^{\mu_1})T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} - (\nabla_\lambda V^{\mu_2})T^{\mu_1\lambda\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} - \cdots \\ &\quad +(\nabla_{\nu_1} V^{\lambda})T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_l} + (\nabla_{\nu_2} V^{\lambda})T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\lambda\cdots\nu_l} + \cdots\end{aligned} \tag{5.32}$$

Où ∇_μ représente une dérivée covariante symétrique (sans torsion) quelconque, incluant bien sûr celle dérivant de la métrique. Si nous développions (5.32), nous pourrions vérifier que tous les termes impliquant les coefficients de connexion s'annulent ne laissant que (5.31). Les deux versions de la dérivée de Lie sont utiles en différentes occasions.

Dérivée de Lie de la métrique

La dérivée de Lie de la métrique se révèle être d'une importance particulière :

$$\begin{aligned}\pounds_V g_{\mu\nu} &= V^\sigma\nabla_\sigma g_{\mu\nu} + (\nabla_\mu V^\lambda)g_{\lambda\nu} + (\nabla_\nu V^\lambda)g_{\mu\lambda} \\ &= \nabla_\mu V_\nu + \nabla_\nu V_\mu \\ &= 2\nabla_{(\mu}V_{\nu)}\ ,\end{aligned} \tag{5.33}$$

où ∇_μ est la dérivée covariante déduite de $g_{\mu\nu}$.

Application à la relativité générale

Regardons comment ces concepts s'intègrent dans la théorie de la relativité générale. Vous avez sans doute entendu dire que la relativité générale est une théorie invariante par les difféomorphismes. Ceci signifie que si l'Univers est représenté par une variété M munie, d'une métrique $g_{\mu\nu}$ et de champs de matière Ψ et si $\Phi : M \to M$ est un difféomorphisme, alors les ensembles $(M, g_{\mu\nu},\Psi)$ et $(M, \Phi_* g_{\mu\nu},\Phi_*\Psi)$ représentent la même situation physique.

Comme les difféomorphismes sont en fait des transformations de coordonnées actives, ce n'est qu'une façon docte de dire que la théorie est invariante par changement de coordonnées. Bien qu'une telle assertion soit vraie, elle incite au malentendu par le simple fait qu'elle ne veut pas dire grand chose.

Toute théorie physique qui se respecte, un tant soit peu, est invariante vis-à-vis des coordonnées y compris celles fondées sur la relativité restreinte ou la mécanique Newtonienne. La relativité n'a rien d'original sur ce point. Quand nous nous disons que la théorie est invariante par les difféomorphismes, nous avons en fait une ou deux idées (en rapport étroit) derrière la tête : La théorie précède la géométrie et conséquemment il n'y a pas de système de coordonnées privilégié pour l'espace-temps. La première s'appuie sur le fait que la métrique est dynamique et donc aussi la connexion, l'élément de volume, etc. A la différence de la relativité restreinte ou de la mécanique Newtonienne, il n'y a aucun a priori.

Donc pas question de s'adosser à un quelconque système de coordonnées, adapté à des éléments absolus à priori de la géométrie, pour nous simplifier la tâche. Cet état des lieux nous incite à la plus grande circonspection, car il n'est pas impossible que deux configurations manifestement différentes (de matière et de métrique) de la relativité générale soient en fait la "même" à un difféomorphisme près. Dans une approche de la gravitation quantique, où nous aurions à sommer les configurations différentes, nous devons être attentifs à ne pas compter deux fois certaines configurations alors qu'elles sont physiquement identiques. En relativité restreinte et en mécanique Newtonienne, l'existence de coordonnées privilégiées nous met à l'abri de telles confusions.

Le fait que la relativité générale n'a pas de système de coordonnée privilégié et souvent confondu avec le fait qu'il est invariant (généralement covariant) vis-à-vis d'un changement de coordonnées, les deux assertions sont vraies, mais l'une contient plus d'information que l'autre. Par contre on peut faire bon usage de l'invariance par les difféomorphismes.

Conservation de l'énergie impulsion comme conséquence de l'invariance par difféomorphisme

Rappelons que l'action totale pour la gravité couplée avec des champs de matière Ψ^i est donnée par la somme de l'action d'Hilbert pour la relativité générale et de l'action de la matière.

$$S = \frac{1}{8\pi G} S_H[g_{\mu\nu}] + S_M[g_{\mu\nu}, \psi^i] \ . \tag{5.34}$$

L'action d'Hilbert S_H est invariante par difféomorphisme quand elle est seule, donc l'action de la matière S_M doit aussi l'être si l'action globale est invariante par difféomorphisme. Nous pouvons donc écrire la variation de S_M par un difféomorphisme comme suit :

$$\delta S_M = \int d^n x \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \int d^n x \frac{\delta S_M}{\delta \psi^i} \delta \psi^i \ . \tag{5.35}$$

Nous ne considérons pas des variations des champs, mais seulement celles qui résultent du difféomorphisme. Néanmoins, les équations du mouvement de la matière nous indiquent que la variation de S_M respectivement à Ψ^i s'annulent pour toute variation (car la partie gravitationnelle de l'action n'invoque pas les champs de matière). Pour une théorie invariante par difféomorphisme le premier terme du membre de droite de (5.35) doit s'annuler. Si le difféomorphisme est généré par un champ vectoriel $V^\mu(x)$, la variation infinitésimale de la métrique est simplement donnée par sa dérivée de Lie, le long de V^μ par (5.33), nous avons :

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu} &= \pounds_V g_{\mu\nu} \\ &= 2\nabla_{(\mu} V_{\nu)} \ . \end{aligned} \tag{5.36}$$

Poser $\delta S_M = 0$ implique :

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^n x \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} \nabla_\mu V_\nu \\ &= -\int d^n x \sqrt{-g} V_\nu \nabla_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} \right) , \end{aligned} \tag{5.37}$$

Où nous pouvons laisser tomber la symétrisation de $\nabla_{\mu} V_{\nu)}$ car $\delta S_M / \delta g_{\mu\nu}$ est déjà symétrique. En imposant que (5.37) reste vraie pour les difféomorphismes générés par des champs de Vecteurs arbitraires V^μ, et en utilisant la définition (4.70) du tenseur énergie impulsion, nous obtenons précisément la loi de conservation de l'énergie impulsion.

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \, . \tag{5.38}$$

C'est pour cela que nous avions proclamé que la conservation du tenseur énergie impulsion $T_{\mu\nu}$ était bien plus qu'une simple conséquence du Principe d'équivalence, il est beaucoup mieux fondé que cela, il est une conséquence directe de l'invariance pas difféomorphisme de la théorie.

Symétries des tenseurs

Il y a encore une application, des mécanismes que nous avons développés dans ce chapitre : La symétrie des tenseurs. Nous dirons qu'un difféomorphisme Φ est **une symétrie** d'un tenseur si le tenseur est invariant par une rétro projection Φ :

$$\phi_* T = T \, . \tag{5.39}$$

Bien que les symétries peuvent être discrètes, il est plus fréquent d'avoir affaire à des familles de symétries mono paramétrées : Φt. Si la famille est générée par un champ de vecteurs $V^\mu(x)$, alors (5.39)

donne :

$$\pounds_V T = 0 \, . \tag{5.40}$$

Par (5.25), une implication de la symétrie est que si T est symétrique par une famille de difféomorphismes mono paramétrée, nous pouvons toujours trouver un système de coordonnées dans lesquelles les composantes de T sont toutes indépendantes d'une des coordonnées (la coordonnée de la courbe intégrale du champ de vecteurs). L'inverse est aussi vrai, si toutes les composantes sont indépendantes d'une des coordonnées, alors le champ de vecteurs de dérivées partielles associé à cette coordonnée génère une symétrie du tenseur.

Isométries

Les symétries les plus intéressantes sont celles de la métrique, pour lesquelles $\Phi_* \, g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$. Un difféomorphisme de ce type est appelé une **isométrie**.

Champ de vecteurs de Killing

Si une famille d'isométries mono paramétrée est générée par un champ de vecteurs V^{μ} (x), alors V^{μ} est appelé un **champ de vecteurs de Killing**. La condition pour que V^{μ} soit un vecteur de Killing est donc :

$$\mathcal{L}_V g_{\mu\nu} = 0 \ , \tag{5.41}$$

avec (5.33) on en déduit :

$$\nabla_{(\mu} V_{\nu)} = 0 \ . \tag{5.42}$$

Équation de Killing

Cette dernière version s'appelle **l'équation de Killing.** Si un espace-temps possède un vecteur de Killing, nous savons que nous pouvons trouver un système de coordonnées dans lequel la métrique est indépendante d'une des coordonnées.

Lois de conservation associées aux vecteurs de Killing

Mais de loin, l'application la plus importante des vecteurs de Killing est que les Vecteurs de Killing impliquent *la conservation de quantités associées au mouvement de particules libres* (sur des géodésiques). Si $x^{\mu}(\lambda)$ est une géodésique avec un vecteur tangent $U^{\mu} = dx^{\mu}/d\lambda$, et si V^{μ} est un vecteur de Killing alors :

$$\begin{aligned} U^{\nu}\nabla_{\nu}(V_{\mu}U^{\mu}) &= U^{\nu}U^{\mu}\nabla_{\nu}V_{\mu} + V_{\mu}U^{\nu}\nabla_{\nu}U^{\mu} \\ &= 0 \ , \end{aligned} \tag{5.43}$$

Où le premier terme s'annule du fait de l'équation de Killing et le second du fait que $x^{\mu}(\lambda)$ est une géodésique. Alors la quantité $V_{\mu}U^{\mu}$ est conservée sur la ligne d'univers de la particule. Ceci s'explique physiquement puisque par définition la métrique est inchangée dans la direction du vecteur de Killing. En schématisant un peu, on peut dire que la particule libre ne sent aucune force dans cette direction, ce qui fait que les composantes de son impulsion sont inchangées dans cette direction.

Espace à symétrie maximale

Autrefois, nous nous référâmes au concept d'espace à symétrie maximale sans en donner une définition précise. La définition rigoureuse est que **l'espace à symétrie maximale** est celui qui possède le plus grand nombre de vecteurs de Killing, nombre qui dans une variété de dimension n vaut $n(n+1)/2$. Nous ne prouverons pas cette assertion, mais elle se comprend informellement facilement. Considérons l'espace Euclidien $\mathbf{R^n}$, dont nous connaissons bien les isométries : translations et rotations. En général il y a n translations, une par direction d'espace. Il y a aussi $n(n - 1)/2$ rotations, pour chacune des n dimensions, il y a $(n - 1)$ directions dans lesquelles nous pouvons opérer une rotation, mais nous devons diviser par deux pour éviter le double emploi (une rotation de x dans y et une rotation de y dans x sont deux occurrences de la même chose). Nous avons donc :

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \tag{5.44}$$

Vecteurs de Killing indépendants. Le même type de dénombrement s'applique aux espaces courbes à symétrie maximum(comme les sphères) ou à signature non Euclidienne (comme les espaces de Minkowski, bien que les détails soient marginalement différents.

Alors qu'il peut être plus ou moins facile de résoudre l'équation de Killing, il est souvent possible de trouver directement des vecteurs de Killing par un examen des symétries de la métrique. (Certes une métrique "générique" n'a pas de vecteurs de Killing, mais nous avons souvent affaire à des métriques possédant des degrés de symétrie élevés). Par exemple dans $\mathbf{R}^2$ avec la métrique $ds^2 = dx^2 + dy^2$, l'indépendance des composantes respectivement à x et y nous offre immédiatement deux vecteurs de Killing :

$$\begin{aligned} X^\mu &= (1,0) \ , \\ Y^\mu &= (0,1) \ . \end{aligned} \tag{5.45}$$

Ils représentent manifestement deux translations.

La rotation correspondrait au vecteur $R = \partial / \partial \theta$, si nous étions en coordonnées polaires. En coordonnées cartésiennes cela devient :

$$R^\mu = (-y, x) \ . \tag{5.46}$$

Vous pouvez vérifier que cela est solution de l'équation de Killing.

Remarquons que pour $n \geq 2$ dimensions, il peut y avoir plus de vecteurs de Killing que de dimensions. C'est parce que l'ensemble des champs de vecteurs de Killing peut être linéairement indépendant même si en un point de la variété, les vecteurs sont linéairement dépendants en ce point. Il est immédiat de montrer (faites- le pour vous en convaincre) qu'une combinaison linéaire de vecteurs de Killing avec des coefficients constants est un vecteur de Killing, non indépendant des autres par construction. Ceci n'est pas nécessairement vrai si les coefficients varient sur la variété. Il est également facile de montrer que le commutateur de deux champs de vecteurs de Killing est un champ de vecteur de Killing. Ceci est très utile à connaître, mais le champ résultant peut ne pas être linéairement indépendant (il peut aussi est nul). Trouver tous les vecteurs de Killing d'une métrique peut donner du fil à retordre et il n'est pas toujours clair de savoir quand on doit s'arrêter.