Espace-temps anti-De Sitter[1]

Etablissement de la métrique

Comme pour l'espace-temps de De Sitter, définissons une variété fictive plate à 5 dimensions de métrique :

$$ds_5 = -u^2-v^2 \circ x^2+y^2+z^2$$

et imbriquons un hyperboloïde défini par :

$$-u^2 -v^2 +x^2+y^2+z^2 = -\alpha^2 \qquad (1)$$

Remarquons les 3 signes négatifs.

Nous allons définir des coordonnées {t', ρ, θ, φ} sur l'hyperboloïde par :

$u = \alpha \sin(t') \cosh(\rho)$

$v = \alpha \cos(t') \cosh(\rho)$

$x = \alpha \sinh(\rho) \cos(\theta)$

$y = \alpha \sinh(\rho) \sin(\theta).\cos(\varphi)$

$x = \alpha \sinh(\rho) \sin(\theta).\sin(\varphi)$ (2)

qui définissent une métrique sur l'hyperboloïde de la forme :

$ds^2 = \alpha^2(-\cosh^2(\rho)dt'^2+d\rho^2 + \sinh^2(\rho)d\Omega_2^2)$ (3)

Notons que *t'* est périodique, ce qui n'est pas trivial. Selon (2) on voit que *t'* et *t'* + 2π définissent le même endroit sur l'hyperboloïde. Comme $\partial_{t'}$ est de type temps partout, une courbe à coordonnées {ρ, θ, φ} constantes, lorsque que t' va croître, va être une courbe fermée. Cependant, ce n'est pas une propriété intrinsèque de cet espace-temps mais un artefact de la manière dont nous avons dérivé la métrique d'une imbrication particulière.

Il est souhaitable de considérer cet espace-temps de recouvrement de cette variété avec la métrique définie en (3) qui permet de faire varier *t'* de -∞ à + ∞ où il n'y a pas de courbes fermées dans cet espace-temps que nous définirons comme l'espace-temps anti-De Sitter.

Diagramme conforme de la métrique

Pour construire le diagramme conforme, nous allons réaliser une transformation de coordonnées analogue à celle utilisée pour l'espace de De Sitter, mais, ici, sur la coordonnée radiale.

$$\cosh(\rho) = \frac{1}{\cos\chi} \qquad (4)$$

---

[1] Traduction des pages 326-328 de « Spacetime and geometry » de S. Carroll, édition.Addison-Wesley. Se reporter à l'ouvrage en cas de doute.

De sorte que :

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{\cos^2 \chi}\ ds'^2 \qquad (5)$$

Où ds'² représente la métrique sur l'univers statique d'Einstein (voir espace-temps de De Sitter.

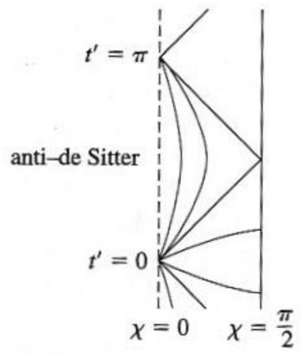

Figure 1. Diagramme conforme de l'espace-temps anti De Sitter. Les sections d'espace ont la topologie de R², que nous avons représenté en coordonnées polaires, ce qui fait que les points du diagramme représentent des 2-sphères excepté pour le bord droit où ce sont des points à l'origine de l'espace. L'infini, à droite, est une surface de type temps.

Contrairement à De Sitter, la coordonnée radiale apparaît dans le facteur conforme. De plus, pour anti-De Sitter, la coordonnée *t'* varie de moins l'infini à plus l'infini, tandis que la plage de la coordonnée radiale vaut :

$$0 \leq \chi < \frac{\pi}{2} \qquad (6)$$

Donc, anti-de Sitter est en relation avec la moitié de l'univers statique d'Einstein.

Le diagramme est représenté sur la figure 1, qui illustre quelques géodésiques de type temps et espace représentatives passant par le point t' = 0 , χ =0. Comme χ varie seulement de 0 jusqu'à $\pi/2$, au lieu de π, une section spatiale de cet espace-temps a la topologie de l'intérieur d'un hémisphère de S^3 ; c.a.d, est de topologie R^3 (et l'espace-temps complet a donc la topologie R^4).

Notons que nous avons représenté le diagramme en coordonnées polaires, tel qu'un point à gauche représente un point à l'origine spatiale, tandis qu'un sur la droite représente une 2-sphère à l'infini spatial.

Propriétés originales de l'espace-temps AdS

Une propriété intéressante d'anti-de-Sitter est que l'infini est une hypersurface de type temps définie par $\chi = \pi/2$. Comme l'infini est de type temps, l'espace n'est pas globalement hyperbolique, ce qui ne correspond pas à un problème, avec une valeur initiale, bien posé en termes d'information spécifié sur la section spatiale, du fait que de l'information, venant de l'infini, peut toujours entrer. Une autre propriété intéressante est que la carte exponentielle n'est pas sur l'espace-temps global, des géodésiques telles que celles dessinées sur la figure 1, qui sont issues d'un certain point ne couvrent pas toute la variété.

Les géodésiques de type temps, orientées vers le futur, peuvent initialement se poursuivre radialement vers l'extérieur, de $t' = 0$, $\chi = 0$, mais éventuellement se refocaliser au point $t' = \pi$, $\chi = 0$ et vont donc se poursuivre radialement vers l'extérieur à nouveau.

Correspondance ADS/CFT

Accessoirement, on ne peut s'empêcher de souligner que la nature de type temps de l'infini induit une propriété remarquable de la théorie des cordes, la correspondance AdS/CFT. AdS est l'espace-temps anti-de-Sitter que nous avons présenté et CFT désigne les théories des champs conformément invariantes définies sur le frontière qui, pour un AdS de dimension n, est un espace-temps de dimension (n -1) sur sa frontière à droite.

La correspondance AdS/CFT suggère que, dans une certaine limite, il y a équivalence entre une théorie de gravité quantique (ou d'une version supersymétrique d'elle) entre un fond AdS et une théorie des champs, conformément invariante, non gravitationnelle, définie sur la frontière.

Comme nous avons bien plus de connaissances sur les théories quantiques de champs non gravitationnelles que nous en avons sur les théories quantiques gravitationnelles, cette correspondance (si elle s'avère vérifiée ce qui est probable, mais non démontré) serait d'une grande utilité pour ouvrir une voie vers une théorie quantique de la gravitation.