Remarques sur la singularité de l'espace temps De Sitter

Résumé:

On montre que lorsqu'on procède à un changement de coordonnées pour faire disparaître la singularité manifeste dans la solution statique de l'espace temps vide de « De Sitter », il demeure un horizon des évènements que des géodésiques traversent dans les deux sens ce qui éclaire la vraie nature de cette « pseudo singularité ».

On montre également que la solution de **De Sitter** qui malmène le principe de **Mach**, cher à **Einstein**, se révèle être une solution générale liée aux symétries du tenseur de Riemann, qu'on peut établir indépendamment des équations d'Einstein et de la métrique.

Elle correspond à une variété à symétrie maximum, homogène, dont le scalaire de Ricci caractérisant la courbure (à quatre dimensions) est positif et constant sur toute la variété. Comme la théorie de la Relativité générale est invariante par difféomorphisme, les propriétés caractéristiques ne peuvent être que globales, celle là est d'autant plus significative qu'elle est globale et de nature quadri dimensionnelle (respecte la covariance).
Elle satisfait l'équation d'Einstein, mais n'est formellement en rien contrainte par elle.

La « dynamique » de cette solution se comprend aisément. Brisons la covariance en étudiant qualitativement le comportement spatial et temporel. La courbure scalaire de Ricci (4D) étant constante quand la courbure spatiale est faible (grand rayon de l'hypersphère spatiale) la courbure temporelle (l'accélération) doit être forte et vice versa.
Mais est ce vraiment une dynamique, ou simplement une exploration de la variété au moyen d'un système de coordonnées?
Ceci nous amènera à réfléchir sur ce qui relève de propriétés purement géométriques et sur ce qui relève de l'équation d'Einstein.

1- Formes Statiques[1] de De Sitter et variantes: 1917-1918

La forme de De Sitter

Alors qu'Einstein était amené à modifier son équation fraîchement établie, en ajoutant en 1917 la constante cosmologique, pour trouver une solution d'univers statique dans le contexte

[1] On pose **c =1**, on adopte la signature (-+++), par matière c'est au sens matière énergie, dans le document.

cosmologique, De Sitter lui fit part d'une solution vide de matière à ses équations:

$$\mathbf{ds^2= - cos^2(r/R).dt^2 + dr^2 +R^2[sin^2(r/R)(d\theta^2 + sin^2\theta.d\varphi^2)]} \quad \mathbf{(1.1)}$$ [2]

Einstein lui répondit dans un premier temps qu'un univers sans matière était inconcevable, mais cela allait ouvrir une polémique qui allait être de plus stigmatisée par la présence d'une singularité dans la forme proposée par De Sitter.

La forme **(1.1*)*** est manifestement singulière (le déterminant s'annule) à $r = \pi R/2$ où pour des géodésiques radiales nulles **dr/dt =0**

Cette singularité, très mal comprise a donné lieu à de longs débats entre Einstein, de Sitter, Klein, Weyl, Lancros, Lemaître, Robertson et quelques autres[3]. Deux points de vue s'affrontaient sur la nature de la singularité et l'existence d'une masse à l'horizon (pour satisfaire au principe de Mach).
Pour une description historique du débat se référer à Earman J. & Eisenstaedt J. (1999)
Comme le cite Klein[4], Weyl [5] avait déclaré : «la vitesse de la lumière s'annule sur l'équateur de la sphère et la forme de la métrique de l'univers de De Sitter doit donc être singulière ».
Effectivement pour une géodésique radiale nulle **dr/dt =0** à l'équateur, mais Weyl a une vision confuse de cette singularité et ne tire pas les bonnes conclusions de sa remarque.
Les travaux ultérieurs vont éclairer la nature de cette singularité. Par ailleurs:

- Cette forme est statique: Les observateurs à coordonnées spatiales constante sont statiques.
- La coordonnée temps correspond au temps propre de l'observateur pour $r = 0$.
- Pour $r = 0$, on se ramène à la forme de Minkowski.
- Les sections spatiales (à $t = constante$) sont l'hypersphère de rayon R.

Variantes de la Forme de De Sitter

$$\mathbf{ds^2 = -(1-r^2/R^2).dt^2 + (1 -r^2/R^2)^{-1}.dr^2 + r^2.(d\theta^2 + sin^2\theta.d\varphi^2)} \quad \mathbf{(1.2)}$$ [6]

La singularité est à **r =R** (équateur**)** dans ces coordonnées.
A noter la ressemblance de cette forme **(1.2)** avec celle de Schwarzschild si on fait ($r^2/R^2 \rightarrow R/r$) où R serait le rayon de Schwarzschild. La coordonnée temps tend vers le temps propre pour $r \rightarrow \infty$ pour Schwarzschild au lieu de pour $r \rightarrow 0$ pour cette forme **(1.2).**

Citons une variante également statique où on utilise l'angle de développement $\chi = r/R$ à la place de r comme variable, par exemple celle donnée par Einstein[7] qui est singulière pour $\chi = \pi/2$ ce qui correspond à l'équateur de l'hypersphère ($r = \pi.R/2$).

$$\mathbf{ds^2= cos^2\chi.dt^2 - R^2 [d\chi^2 +sin^2\chi (d\theta^2 + sin^2\theta.d\varphi^2)]} \quad \mathbf{(1.3)}$$

Toutes ces variantes ont globalement les mêmes propriétés que la forme de De Sitter

[2] Forme originale donnée par De Sitter: Cité dans Earman J. & Eisenstaedt J. (1999) p 192. Scalaire Ricci =12/R²
[3] Ce point est exposé en détail dans : Earman J. & Eisenstaedt J. (1999)
[4] Cité dans Eisenstaedt (1993) p. 357
[5] Weyl (1919) p. 31
[6] Citée dans **Szekeres (1960**) p285, le scalaire de Ricci vaut 12/R², il est constant (Mathematica 4)
[7] De Sitter (1917b p.230) a également proposé cette forme. Cité dans Eisenstaedt (1993) p.355

2- Forme non statique de Lancros : 1922

En s'inspirant des travaux de Klein, Lancros[8] établit la forme suivante:

$$\mathbf{ds^2 = -d\tau^2 + \cosh^2\tau\,(d\psi^2 + \sin^2\psi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2))} \qquad \textbf{(2.1)}^{9}$$

$\boldsymbol{\tau}$ est le temps propre des observateurs à coordonnées spatiales constantes (« comobiles »).

Klein[10] a cherché une forme en imbriquant l'espace temps de « De Sitter » en l'occurence un Hyper-hyperboloïde d'équation: $\mathbf{-u^2 + x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2}$, **d**ans un espace de Minkowski à 5 dimensions (quatre d'espace et une de temps) de métrique $\mathbf{ds_5^2 = -du^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2}$**.**

a) Il n'y a pas de singularité apparente, mais un calcul simple (ci-dessous) montre qu'il a un horizon des évènements associé à chaque observateur.
Pour illustrer une comparaison avec l'horizon de la forme de De Sitter **(1.3)** il faut étudier la même trajectoire d'un photon (géodésique nulle) émis par un observateur dans les deux systèmes de coordonnées qu'on va appliquer simultanément sur la variété. Fixons les coordonnées de l'observateur dans les deux formes. Il est naturel de faire coïncider le point ($\boldsymbol{\chi = 0, t = 0}$) dans **(1.3)** avec ($\boldsymbol{\psi = 0, \tau = 0}$) dans **(2.1)** par raison de symétrie des formes**.**
Dans ces conditions le calcul montre que l'horizon dans **(2.1)** se situe à $\boldsymbol{\psi = \pi/2}$, alors que la singularité exprimée par la forme **(1.3)** se situe à $\boldsymbol{\chi = \pi/2}$**.** On note la parfaite concordance.
b) Comme on le remarque, la forme **(2.1)** n'est plus statique (dépend du temps propre).
c) Les **observateurs** « comobiles » **sont en chute libre**, puisque la coordonnée temps est le temps propre.
d) Les sections spatiales sont des hypersphères de rayon dépendant du temps.
e) Contrairement à **(2.1-.3),** la solution est spatialement ouverte ($\mathbf{\cosh^2\tau} \to \infty$ quand $\boldsymbol{\tau} \to \pm\infty$).
f) La forme décrit toute la variété (extension analytique maximale)

Calcul du rayon de l'horizon

On peut calculer cet horizon pour un rayon reçu (horizon du passé) ou émis (horizon du futur). La forme de Lancros est symétrique par rapport à $\boldsymbol{\tau} = 0$.

a) Considérons un observateur à $\boldsymbol{\tau = 0}$ et $\boldsymbol{\psi = 0}$. Du fait de la symétrie, les distances d'horizons du passé et du futur seront égales dans ce cas.
Ce ne sera pas le cas pour un observateur quelconque (on illustrera brièvement ce cas).
Calculons le temps mis par un rayon lumineux émis radialement au temps $\mathbf{t_e}$**,** à une distance angulaire $\boldsymbol{\psi_H}$ d'un observateur, vers cet observateur (situé à $\psi = 0$) et reçu par lui à $\boldsymbol{\tau = 0}$.

$$\mathbf{ds^2 = -d\tau^2 + \cosh^2\tau.d\psi^2 = 0\ ,\ \to d\tau^2/\cosh^2\tau = d\psi^2, \to d\tau/\cosh\tau = \pm d\psi.}$$

On va s'intéresser à la propagation vers les ψ croissants ($\mathbf{d\psi/d\tau > 0}$): $\mathbf{d\tau/\cosh\tau = +d\psi}$
Il faut intégrer[11] le long du chemin de $\psi = \boldsymbol{\psi_H}$ à $\psi = 0$, ($\boldsymbol{\tau = t_e}$ **à** $\boldsymbol{\tau = 0}$).

$$\int_{te}^{0} \mathbf{d\tau / \cosh\tau = [2arctg\,(exp(\tau))]_{te}^{0}} = \int_{\psi H}^{0} \mathbf{d\psi = -\psi_H}$$

---

[8] Lancros(1922a) et Lancros (1922b)
[9] Cité dans : Eisenstaedt J. (1993) Lemaître and the Schwarzschild solution, The Attraction of Gravitation : New Studies in the History of General Relativity. J. Earman, M. Janssen, J.D. Norton editors p 358
[10] Klein (1918a, 1918b)
[11] Bronstein I.N & Semandiaev K.A (1982), donne l'intégrale de $\int dx/\cosh(ax) = (2/a)\mathrm{arctg}[\exp(ax)]$, p 570

Si $t_e \to -\infty$, ce qui correspond l'horizon du passé des évènements, on obtient:
$$[2\mathrm{arctg}\,(\exp(\tau))]_{-\infty}^{0} = 2\mathrm{arctg}\,(\exp(0)) - 2\mathrm{arctg}\,(\exp(-\infty)) = 2.\pi/4 - 0 = \pi/2 = -\psi_H$$

Dans l'autre sens (horizon du futur) on aurait eu $\psi_H = \pi/2$.
Cette valeur de $\psi_H = \pi/2$ correspond bien à celle de la singularité de la forme **(1.3)**

b) Si l'observateur est quelconque $\psi = \psi_r$ et ($\tau = t_r$)

$$\int_{te}^{tr} d\tau / \cosh\tau = [2\mathrm{arctg}\,(\exp(\tau))]_{te}^{tr} = \int_{\psi H}^{\psi r} d\psi = \psi_r - \psi_H$$

Si $t_e \to -\infty$, ce qui correspond l'horizon du passé des évènements,
$$\psi_H = \psi_r - 2\mathrm{arctg}\,(\exp(tr))$$
On voit que $\psi_r - \psi_H$ ne dépend que de t_r. (Classes d'observateurs)

On pourrait calculer l'horizon du futur par la même méthode: observateur de coordonnées $\psi = \psi_e$ et ($\tau = t_e$)

$$\int_{te}^{tr} d\tau / \cosh\tau = [2\mathrm{arctg}\,(\exp(\tau))]_{te}^{tr} = \int_{\psi e}^{\psi H} d\psi = \psi_H - \psi_e$$

Si $t_r \to \infty$, ce qui correspond l'horizon du futur des évènements,
$$\psi_H - \psi_e = 2\mathrm{arctg}\,(\exp(\infty)) - 2\mathrm{arctg}\,(\exp(t_e)) = \pi/2 - [2\mathrm{arctg}\,(\exp(t_e))]$$
On voit que pour $t_e \to \infty$, $2\mathrm{arctg}\,(\exp(t_e)) \to \pi/2 \to \psi_H - \psi_e \to \pi/2 - \pi/2 \to 0$

Ce qui était intuitivement prévisible, compte tenu de l'expansion « exponentielle » quand $t \to \infty$, celle-ci croît si rapidement que l'horizon des évènements pour chaque observateur tend vers zéro. L'univers devient totalement causalement déconnecté.

Cela éclaire la nature de la singularité notée par Weyl. Dans cette forme, on ne peut pas parler « d'annulation » de la vitesse de lumière localement sur cet « horizon ». Simplement l'expansion fait que pour cette distance (entre l'observateur et l'horizon associé), l'accroissement « spatial » de la géodésique par intervalle de temps ***dt*** vaut ***c.dt*** (autrement dit pendant que le photon juste émis parcourt ***c.dt,*** du fait de l'accroissement de ***c.dt*** de la géodésique, la distance à parcourir reste la même, le photon fait du surplace vis-à-vis de l'observateur distant, il ne l'atteindra jamais). On voit que cela s'évalue par une intégrale sur le chemin à parcourir. Ce qui fait que au delà de cet horizon aucun signal vers l'observateur ne peut l'atteindre, (c'est un horizon des évènements) mais cela n'est **pas une vraie singularité, des géodésiques le traversent dans les deux sens**: cet horizon est propre à cet observateur.
En effet à la différence d'un horizon comme celui de la solution de Schwarzschild qui est le même pour tous les observateurs extérieurs, celui est propre à chaque observateur.
Cette forme montre la vraie nature de cette singularité qui n'est autre que la limite de l'univers observable pour un observateur donné.

3 – Forme de Lemaître[12] (1925)- Robertson(1928)

Lemaître n'appréciait pas la forme originale (1) car elle semblait privilégier un centre fixe[13], alors qu'elle était manifestement spatialement homogène.

---

[12] Lemaître (1925), établie indépendamment par Robertson (1928) cité : Earman J. & Eisenstaedt J.(1999) p202
[13] Notons que Lemaître s'attache à l'homogénéité spatiale (pas à l'homogénéité totale).

Il a cherché, indépendamment des travaux de Lancros dont il n'a pas eu connaissance, une expression qui reflétait la symétrie de la solution, il a proposé[14]:

$$ds^2 = -dt^2 + \exp(2t/R).(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2)) \qquad (3.1)$$

a) Il n'y a pas de singularité apparente, mais un calcul similaire au précédent montre qu'il a un horizon des évènements à $r = R$, ce qui correspond à la singularité de la forme **(1.2)**
b) Notons que la forme **(3.1)** est également non statique (dépend du temps propre).
c) Les **observateurs** « comobiles » **sont en chute libre**: la coordonnée t est le temps propre.
d) La solution est spatialement ouverte (**$\exp(2t/R) \rightarrow \infty$** quand **$t \rightarrow +\infty$**).
e) Les sections spatiales (***t = cste***) sont «euclidiennes » à la différence de la forme de Lancros.
f) En fait c'est la métrique de Robertson Walker pour $k = 0$ et $a^2(t) = \exp(2t/R)$[15].
g) La solution ne décrit pas toute la variété, à la différence de celle donnée par Lancros[16].

Calcul du rayon de l'horizon

C'est le même type de calcul que précédemment.
Cette forme ne possède pas la symétrie de celle de Lancros.
Faisons le calcul pour un observateur particulier **$r = 0$** et **$t = 0$**.
Calculons le temps mis par un rayon lumineux émis radialement au temps **$t = 0$** par un observateur situé à **$r = 0$,** et reçu à t_r à une distance r_H de cet observateur.

$$ds^2 = dt^2 - \exp(2t/R).dr^2 = 0 \rightarrow dt^2/\exp(2t/R) = dr^2 \rightarrow dt.\exp(-t/R) = dr,$$

Il faut intégrer le long du chemin de $r = r_H$ à $r = 0$, ($t = t_e$ à **$t = 0$**).

$$\int_0^{tr} dt.\exp(-t/R) = -[R.\exp(-t/R)]_0^{tr} = \int_0^{rH} dr, = r_H$$

Si $t_r \rightarrow \infty$, ce qui correspond à un horizon des évènements, on obtient : **$r_H = R$**
Cette valeur de r_H correspond bien à celle de la singularité de la forme **(1.2)**
Il est facile de vérifier que ce calcul s'adapte facilement au cas général.
Pour un temps infini, cet horizon se réduit à zéro comme dans le cas de la forme de Lancros.

---

[14] Robertson a proposé la transformation suivante: $r' = r.\exp(-t/R)$, $t' = t - (R/2)\ln(1-r^2/R^2)$. Dans (5), $r' \rightarrow r$, $t' \rightarrow t$.
[15] On peut l'obtenir comme solution du vide de l'équation de Friedman Lemaître (avec constante cosmologique)
[16] La transformation de Robertson montre qu'on ne peut pas étendre indéfiniment vers le passé les géodésiques temporelles. Cité dans Earman J. & Eisenstaedt J.(1999) p202

4 – Espaces temps à symétrie maximum[17]

Les espaces temps à symétrie spatiale maximum sont en fait des cas particuliers d'une situation plus générale où, par exemple, c'est seulement l'espace qui est symétrique.
Dans un certain sens, de tels univers sont des « ***états de base*** » de la Relativité Générale.
Le tenseur de Riemann caractérise complètement la courbure intrinsèque de l'espace temps, il doit donc refléter ses symétries. Dans le cas général, ses composantes sont des fonctions de la métrique et de ses dérivées premières et secondes. Pour un espace temps à symétrie maximum, il se simplifie considérablement, ses composantes ne sont fonction de que la métrique elle-même. Dans une variété à n dimensions de métrique $g_{\mu\nu}$, il s'écrit :

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = K(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}) \qquad (4.1)$$

Où K est la mesure normalisée de la courbure de Ricci

$$K = R/n(n-1) = R/12 \qquad (\text{pour } n = 4) \qquad (4.2)$$

Et le scalaire de Ricci « R » doit être constant partout dans la variété. Comme nous pouvons toujours mettre la métrique sous sa forme canonique en un point quelconque ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$), les sortes d'espaces temps à symétrie maximum vont être caractérisés localement par la signature de la métrique et par le signe du paramètre constant **K**. Nous disons, localement, pour permettre différentes solutions globales possibles, comme pour le plan et le tore.
Nous nous intéressons aux métriques de signatures ***(- + + +)***.

Les trois cas génériques correspondent donc à K < 0 (espace-temps anti De Sitter) , K = 0 (espace-temps de Minkowski) , K > 0 (espace-temps de De Sitter)

Pour **K = 0** nous connaissons bien cette métrique, c'est celle de Minkowski.

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (4.3)$$

Le diagramme conforme associé est connu.

L'espace temps à symétrie maximum correspondant à **K > 0,** courbure positive[18] est appelé l'espace « ***de Sitter*** ». Considérons un espace de Minkowski à ***5*** dimensions de métrique $ds_5^2 = -du^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2$ et définissons y un (hyper)hyperboloïde[19] donné par

$$-u^2 + x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \alpha^2 \qquad (4.4)$$

Maintenant définissons les coordonnées (t, χ, θ, Φ) sur l'(hyper)hyperboloïde via

$$u = \alpha.\sinh(t/\alpha)$$
$$w = \alpha.\cosh(t/\alpha).\cos\chi$$
$$x = \alpha.\cosh(t/\alpha).\sin\chi.\cos\theta$$
$$y = \alpha.\cosh(t/\alpha).\sin\chi.\sin\theta.\cos\Phi$$
$$z = \alpha.\cosh(t/\alpha).\sin\chi.\sin\theta.\sin\Phi \qquad (4.5)$$

---

[17] Adapté de Carroll S. M (2004). Spacetime and Geometry. Pearson-Addison Wesley. Maximally symmetric universes p139-141 & p323-329

[18] Nous ne traitons pas ici de l'autre solution à symétrie maximum, celle à courbure négative constante, l'espace anti-Sitter. Notons que cet espace Anti De Sitter sert « d'espace de fond » dans certaines cosmologies branaires.

[19] Il conviendrait de faire la différence entre courbure intrinsèque et courbure extrinsèque. Le choix à priori de l'hypersurface « Hyperboloïde » imbriqué dans un espace Minkowskien 5D, s'appuie sans doute sur la connaissance de la courbure d'une telle hypersurface compatible avec ce qu'on recherche. Ne devrait on pas démontrer au moins que si la courbure extrinsèque est constante la courbure intrinsèque l'est aussi ?

La métrique sur l'hyperboloïde est alors

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2 \cosh^2(t/\alpha)[\, d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2)] \qquad (6)$$

a) La métrique est non statique. Mathematica 4, permet de vérifier qu'elle satisfait ***(4.1).***
b) Il n'y a pas de singularité apparente (mais un horizon des évènements[20]). A ce propos, remarquons que quand nous avons calculé la distance de cet horizon pour les formes **(4)-(5),** nous avons noté qu'elle dépendait des coordonnées temporelles de l'observateur (cette distance est maximum pour $\mathbf{t = 0}$ et elle → **0** quand $\mathbf{t} \to \infty$ où l'univers devient totalement causalement déconnecté). On peut vérifier que ceci s'applique également à la forme **(6).** Cela peut paraître surprenant pour une solution a symétrie maximum où tous les points sont équivalents. A priori, un système de coordonnées étant arbitraire, il semblerait toujours possible d'imposer $\mathbf{t = 0}$ et $\boldsymbol{\psi = 0}$ pour l'observateur qu'on considère **(**choix des origines**)**. Mais remarquons que les formes (4)-(6) n'étant pas homogènes par rapport au temps, elles déterminent des classes d'observateurs et la dépendance des coordonnées doit se lire comme caractérisant la relation entre les différentes classes. Cela est lié à la brisure de symétrie liée à l'utilisation de cette forme. Existe t'il cependant un critère indépendant des coordonnées, de nature conforme, par exemple, lié aux géodésiques nulles, pour caractériser les hypersurfaces remarquables qui régentent la causalité ? L'équivalence conforme entre l'univers de De Sitter et celui statique d'Einstein, n'éclaire pas ce problème comme on aurait pu l'espérer, car il n'y a pas d'horizon des évènements dans la solution statique d'Einstein.
c) La coordonnée ***t*** correspond au temps propre.
d) Nous reconnaissons[21] entre parenthèses la métrique sur une ***2-sphère*** $d\Omega_2^2$ et entre crochets la métrique sur une ***3-sphère*** $d\Omega_3^2$ qui sont les sections spatiales
e) Le scalaire de Ricci vaut $\mathbf{12/\alpha^2}$ conformément à (4-2) avec $\boldsymbol{\alpha^2 = 1/K}$, $\boldsymbol{\alpha}$ étant le rayon de l'hypersphère spatiale: il est constant sur la variété (vérifié par mathématica 4)
f) La forme décrit une variété spatialement ouverte $\cosh(t/\alpha) \to \infty$ quand $t \to \pm\infty$.
g) Ces coordonnées couvrent toute la variété. On peut le vérifier en étudiant le comportement des géodésiques aux limites du système de coordonnées, car si les coordonnées sont incomplètes, les géodésiques se terminent alors que le paramètre affine associé reste fini

La topologie de l'espace « de Sitter » est $\boldsymbol{R \times S^3}$.
Donc la métrique de "de Sitter" décrit une ***3-sphère*** qui initialement rétrécit, atteint son minimum pour $t = 0$, et ensuit rebondit et gonfle à jusqu'à l'infini.

Bien sur cette description est valide dans ce système de coordonnées, nous avons vu qu'il y a d'autres descriptions tout aussi valides. La forme de Lancros est très proche de celle-ci ($\alpha = 1$)

L' univers de De Sitter et l'univers statique d'Einstein sont conformément équivalents

Il y correspond un diagramme conforme très simple, on peut en effet écrire cette métrique dans une forme conformément reliée à l'univers statique d'Einstein (un espace temps de

[20] On ne le redémontre pas, mais c'est la même intégrale que pour la forme **(2.1).** Scalaire de Ricci = $12/\alpha^2$

[21] Remarque sur les notations : Par 2-sphère nous entendons la surface (à deux dimensions) d'une sphère classique, par une 3- sphère il s'agit d'une hypersphère 3D.

topologie ***R x S3***, décrivant une 3-sphère spatiale de rayon constant dans le temps). Considérons la transformation de coordonnée de ***t*** en ***t'*** par :

$$\cosh(t/\alpha) = 1/\cos(t') \qquad (4.7)$$

La métrique ***(4.6)*** devient alors

$$ds^2 = [\, \alpha^2/\cos^2(t')]\, ds'^2 \qquad (4.8)$$

Où ds'^2 représente la métrique de l'univers statique d'Einstein

$$ds'^2 = -dt'^2 + d\chi^2 + \sin^2\chi . d\Omega_2^2 \qquad (4.9)$$

la nouvelle coordonnée temps s'étend de

$$-\pi/2 < t' < \pi/2 \qquad (4.10)$$

Ceci est représenté par le diagramme ci-dessous.

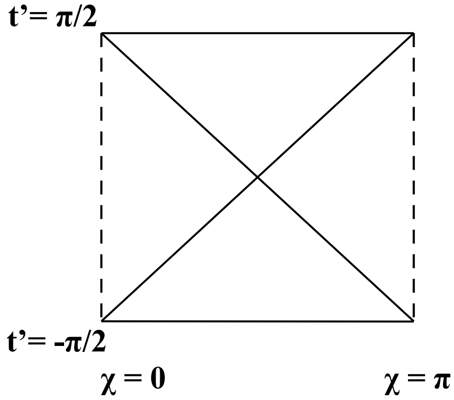

Figure 4.1 : Diagramme conforme de l'espace-temps « de Sitter ».Les tranches d'espace sont des ***3-sphères***, donc les points du diagramme sont des ***2-sphères***, sauf sur les bords droit et gauche qui représentent des points.

Le diagramme conforme de l'espace temps « de Sitter » est simplement la représentation de la pièce de l'univers statique d'Einstein, qui y est conformément équivalent.
Il ressemble à un carré, comme la figure **4.1** le montre.
Une tranche d'espace à ***t'*** constant représente une 3-sphère (hypersphère), les lignes interrompues à gauche et à droite sont le pôle nord et le pôle sud de cette 3-sphère.
Les lignes diagonales représentent des trajectoires de photons.
Un photon partant de l'infini du passé va aller à l'antipode de cette 3 sphère à l'infini du futur.
Si l'hypersphère n'est pas facile à se représenter, il faut se rappeler que les géodésiques lumière suivent des grands cercles de l'hypersphère, qui sont eux faciles à représenter, c'est pour cela que à l'image de ce qui se passe à la surface d'une 2-sphère pour des grands cercles un photon va aux antipodes (et il peut continuer et boucler indéfiniment dans la solution d'univers statique d'Einstein). Par ailleurs la représentation conforme préserve le caractère des géodésiques lumières, et la causalité associée.

Gardons à l'esprit que l'espace se « termine » dans le passé et dans le futur par la « magie » de la transformation conforme, l'espace temps de « de Sitter » s'étendant indéfiniment vers le passé et vers le futur.
Remarquons aussi que deux points peuvent avoir des cônes de lumière du futur ou du passé qui sont complètement disjoints.
Ceci est dû au fait que les sections sphériques spatiales s'étendent si rapidement que la lumière d'un point ne peut jamais rencontrer celle émise par l'autre.
Le fait que ces univers soient conformément équivalents n'est pas surprenant car ils sont tous les deux à symétrie maximum, ceci malgré leur différence de nature physique, l'univers statique d'Einstein contient de la matière, il est fini et à ce titre a toutes les qualités requises par Einstein pour satisfaire au principe de Mach, alors que l'univers de De Sitter est vide.

5- L'espace temps de « De Sitter » est il vraiment une solution des équations d'Einstein ?

Dans le chapitre précédent nous n'avons utilisé que des critères généraux géométriques sur les variétés, sans faire intervenir à quelque moment que ce soit la Relativité Générale.

Nous avons trouvé une solution où les contraintes liées à la symétrie déterminent la forme métrique de cet espace temps (le seul paramètre libre est la valeur de la courbure : elle définit complètement la variété).

Comme à aucun moment nous n'avons utilisé la Relativité générale pour établir la solution complète correspondant à l'univers « De Sitter », nous pouvons déclarer que l'Univers de « De Sitter » n'est pas une solution de la Relativité Générale.

L'équation d'Einstein avec constante cosmologique Λ dans le vide (De Sitter) s'écrit:

$$\mathbf{R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, (R - 2\Lambda) = 0} \qquad \textbf{(5-1)}$$

En élevant un indice et en contractant on obtient :

$$\mathbf{R - 2R + 4\,\Lambda = 0 \rightarrow R = 4\,\Lambda}$$

(4-2) nous donne la courbure normalisée:

$$\mathbf{K = R/n(n-1) = R/4.3 = R/12 = \Lambda/3}$$

Cette solution satisfait l'équation d'Einstein car le tenseur d'Einstein a été construit à partir du tenseur de Ricci, du scalaire de Ricci et la métrique, pour obtenir un tenseur de divergence covariante nulle. Si dans cette construction, on ajoute une constante au scalaire de Ricci, par exemple, la divergence du nouveau tenseur ainsi construit va satisfaire également à la condition de divergence nulle. Nous avons toute une classe de « tenseurs d'Einstein » potentiellement valides pour son équation, correspondant à une classe d'univers (différentiés entre autres par la condition de courbure à la limite lorsque la densité de matière → 0).
Elle permet de relier la constante cosmologique au scalaire de Ricci, dans le cadre de cette équation, mais notons que cette information ne nous a absolument pas servi dans l'établissement de la solution (seul le signe de la courbure a été utilisé).

Si la constante cosmologique avait un sens physique[22] l'équation d'Einstein apporterait quelque chose en reliant un paramètre géométrique (la courbure) à un paramètre physique, mais ce n'est pas le cas. L'équation d'Einstein n'a donc pas de valeur ajoutée sur cet aspect.

Rappelons qu'en Relativité générale, pour chercher une solution, nous devons utiliser une métrique « générique» à priori dont on spécifie la forme à partir d'un certain nombre de considérations géométriques à priori sur une Variété « générique » dont on induit qu'elle va servir de trame à notre solution, et qu'on applique l'équation d'Einstein pour contraindre (par la matière énergie) ces éléments génériques pour obtenir si possible une solution complètement définie.
Cette contrainte ne porte que sur la trace du tenseur de Riemann, (pas sur le tenseur de Weyl) trace qui est nulle en cas de solution dans le vide.
On peut donc se demander si une solution dans le vide est une solution de la Relativité Générale, ou si elle est simplement une solution géométrique, exprimée dans le formalisme de la Relativité Générale (La matière n'apporte aucune contrainte à la partie géométrique de l'équation, qui est complètement définie par la métrique).

On remarque par exemple, que des travaux comme la classification de Petrov qui s'appuient sur le tenseur de Weyl, le font sur des considérations purement géométriques qui n'ont rien à voir avec la Relativité Générale. Il convient donc d'être attentif aux apports respectifs.

6- L'indépendance de la solution De Sitter vis-à-vis de la Relativité générale sauve t'elle le principe de Mach ?

Einstein prétend qu'une solution d'espace temps ne saurait exister sans matière. Cette matière détermine le tenseur métrique $\mathbf{g}_{\mu\nu}$ et crée l'inertie. Ici c'est la symétrie de la solution qui détermine la métrique, sans recours à l'équation d'Einstein, cela ne plaide t'il pas en faveur d'une non contradiction de la Relativité Générale avec le principe de Mach?
Cela ne résout pas tout, car des solutions comme celle de Schwarzschild posent également un sérieux problème. Une masse unique peut elle avoir une inertie ?
La solution de Schwarzschild ne répond pas à cette question, le paramètre de masse qu'on calcule pour la singularité centrale ne correspond pas à une masse inerte, mais à une masse gravitationnelle active qui se calcule d'ailleurs à partir de critères géométriques (Intégrale de Komar). Là encore il y a matière à réflexion sur la compatibilité avec le principe de Mach dans cette solution. Elle génèrerait l'inertie pour les autres masses, (encore que le problème du mouvement de particules dans un champ soit un problème complexe) mais l'histoire ne dit pas si elle en a une.

7- Energie du vide et inertie

Quand on considère les différents types d'espace temps en Cosmologie Relativiste et les équations de Friedmann Lemaître, on déduit une relation importante (conservation covariante de l'énergie):

$$d(\rho . a^3)/dt = - p.d(a^3)/dt \qquad \rightarrow \qquad dU + P.dV = 0 \qquad (7\text{-}1)$$

où $\boldsymbol{\rho}$ est la densité d'énergie et $\boldsymbol{a}$(t) le facteur d'échelle dépendant de **t**.

[22] Il y a des hypothèses: énergie du vide, quintessence, par exemple, mais aucune n'a donné satisfaction aujourd'hui, les tests cosmologiques semblent toutefois privilégier l'hypothèse d'une «constante cosmologique».

En interprétant de façon thermodynamique cette relation, elle exprime la relation entre la variation d'énergie contenue dans un volume comobile $\boldsymbol{U = \rho.a^3}$ (membre de gauche) et le travail fourni (membre de droite) $\boldsymbol{P.dV= p.d(a^3)}$.

Pour l'énergie du vide (constante cosmologique) le fluide est à densité constante $\boldsymbol{\rho_v}$ et de pression $\boldsymbol{p_v = - \rho_v}$. L'équation (7-1) s'écrit : $\boldsymbol{dU + P.dV \equiv 0}$.

Ceci fait dire que l'énergie du vide n'a pas d'inertie (pas de masse inerte).

8 L'univers de « De Sitter » est il statique ou dynamique ?

Il semble difficile de donner un sens physique à cette question, puisque pour une même solution, comme nous l'avons vu, cela dépend de la forme de la métrique qu'on utilise : Certaines sont statiques d'autres dynamiques.
Rappelons qu'on peut décrire synthétiquement la variété sans avoir à privilégier une quelconque des coordonnées par sa courbure (4D) qui est constante partout dans la variété du fait de l'homogénéité de la solution.
De toute façon les coordonnées, ne sont que des étiquettes pour repérer les points de la variété qui inclut l'espace et le temps et du fait de la covariance il n'y a aucune raison de privilégier une de ses coordonnées individuellement.
Que dans une forme de la métrique, la partie spatiale dépende du temps ou l'inverse n'est finalement qu'un problème géométrique d'agencement interne.

Que définit vraiment la Relativité Générale ?

Les géodésiques, par exemple, ne sont elles que des courbes géométriques qui traduisent simplement une propriété géométrique (transport parallèle du vecteur tangent). La géodésique définie comme extremum local d'une courbe utilise une métrique et l'équivalence des deux concepts[23] se fait à travers l'identification des coefficients de connexion affines et métriques.
Les particules de test qu'on introduit pour tracer la dynamique interne, font elles partie de la théorie ou sont elles un ajout, nécessité par le souci de faire de la physique ?

Pour les univers non vides l'équation d'Einstein, par la présence du tenseur énergie impulsion, munit la solution d'un caractère physique et le problème de sa dynamique a un sens physique.
En particulier le référentiel chute libre est matérialisé[24] et déterminé par la matière énergie ce qui donne un sens physique au mouvement de particules de test par rapport au référentiel.
L'équation du mouvement ($\mathbf{T}^{\mu\nu}{}_{;\,\nu} = 0$) se déduit du tenseur énergie impulsion d'un fluide.

Pour les univers vides, les « particules de test » matérialisant les géodésiques, ont-elles une motivation physique, alors qu'aucun élément physique n'intervient dans la construction de la solution[25] ? A priori les géodésiques nulles sont plus appropriées pour décrire ces espaces

Le temps propre (grandeur à 4 dimensions à qui on peut attribuer un caractère physique: on sait le mesurer) est un paramètre affine privilégié pour baliser les géodésiques temporelles physiques. Cette propriété ne structure t'elle pas la forme de la métrique, en privilégiant celle où la variable temps est le temps propre (Observateurs en chute libre)[26].

---

[23] Gourgoulhon.E Cours de Relativité Générale IAP (2006) p.82-86
[24] Le Rayonnement de Fond Cosmologique (RFC) dans la solution Friedman Lemaître Robertson Walker
[25] On parle ici de particules de test virtuelles, dans le cas de particules matérielles «réelles », c'est plus complexe. Earman J. & Eisenstaedt J. (1999) chap. 7 « The problem of motion » p 204-224
[26] Dans certaines solutions dans le vide, les formes les plus utilisées ne sont pas celles là (Schwarzschild, Kerr,..)

La Relativité Générale est assez ambiguë la dessus, d'autant qu'on sait que les « bonnes » variables ne peuvent être que globales, du fait de l'invariance par difféomorphisme. Son utilisation pour faire de la physique échappe t'elle à une interprétation de la théorie ?

Et alors quid des autres types de géodésiques et des lignes d'univers non géodésiques[27]?
On voit que souvent (mais pas toujours) on est plus à l'aise avec une forme où la coordonnée temps est le temps propre des observateurs associés à cette forme. Mais n'est ce pas que simple commodité ou habitude issue des méthodes classiques. La Relativité Générale clamant haut et fort que tous les référentiels se valent, nous incite à ne pas tirer de conclusions générale d'éléments spécifiques à cette approche, avant d'en avoir vérifié la portée.

9 Conclusion

Nous avons vu que l'horizon de la solution de l'univers de De Sitter était fictif. Par ailleurs nous avons discuté du caractère relativiste de cette solution et montré que cela n'était pas si évident que cela.

Références :

Bronstein I.N & Semandiaev K.A (1982), Eléments d'analyse mathématiques, In « Aide mémoire de mathématiques », 7ème édition (formule 433) p 570 (Eyrolles)
Carroll S. M (2004). Spacetime and Geometry. Pearson-Addison Wesley. Maximally symmetric universes p323-329
De Sitter. W. (1917a). "On the relativity of inertia. Remarks Concerning Einstein 's latest hypothesis". Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Section of Sciences. Proceedings 19:1217-1225
De Sitter. W. (1917b). "On the curvature of space". Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Section of Sciences. Proceedings 20:229-242
De Sitter. W. (1918). "Further remarks on the solutions of the field Equations of Einstein Theory of gravitation". Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Section of Sciences. Proceedings 20:1309-1312
Earman J. & Eisenstaedt J.(1999). Einstein and Singularities. Stud.Hist.Mod.Phys. Vol 30.N°2 pp185-235. Elsevier Science Ltd GB
Eisenstaedt J.(1993) "Lemaître and the Schwarzschild Solution." In New Studies in the History of General Relativity. Proceedings of the Third International Conference on the History and Philosophy of General Relativity. Einstein Studies, Vol. 5, John Earman, Michel Janssen, and John D. Norton, eds. Boston: Birkhäuser,
Eisenstaedt J. (2003). Einstein et la relativité générale, les chemins de l'espace temps. P 254.
Gourgoulhon E. Cours de Relativité Générale IAP (2006) p.82-86
Klein F.(1918a). "Bemerkungen über die Beziehungen des De Sitterschen Koordinatensystem B zu der allgemeinen Welt konstanter positiver Krümmung". Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Section of Sciences. Proceedings 21(1918-1919): 614-615
Klein F.(1918b). "Über die Integralform der Erhaltungssatze und die Theorie der raümlichgeschlossenen Welt". Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Nachrichten: 394-423
Lancros C. (1922a). «Ein vereinfachendes Koordinatensystem für die Einsteinschen Gravitationsgleighlungen». Physikalische Zeitschrift 23: 537-539
Lancros C. (1922b). «Bemerkung zur De Sitterschen Welt». Physikalische Zeitschrift 23: 539-543

[27] A moins que la RG ne considère que des géodésiques, les mouvements non géodésiques, n'en feraient pas partie. Par exemple pour une fusée ce serait le centre de masse qui serait concerné par la RG…

Lemaître G. (1925a) “Note on De Sitter’s Universe.” Publication du Laboratoire d’Astronomie et de Géosésie de l’Université de Louvain 2 :37-41. & Journal of Mathematics and Physics 4 : 188-192
Lemaître G.(1925b). »Note on De Sitter’s Universe ». Phys. Rev. 25 :903
Szekeres G. (1960). On the singularities of a Riemannien manifold. Publ. Mat. Debrecen 7, 285-301.
Weyl H.(1919)”Über die statischen Kugelsymmetrischen Lösungen von Einsteins kosmologischen Gravitationgleichungen” Physikalischer Zeitschrift 20: 31-34