Géodésiques de type espace en relativité générale

Introduction

C'est sans doute parce qu'on se demande à quoi elles peuvent servir et comment leur donner une interprétation physique que cette classe de géodésiques est peu étudiée en RG.

On en parle à propos des trous de ver (connectant les régions I et IV en métrique de Kruskal) dans les TN statiques, puisque les lignes d'univers les traversant sont de type espace, ce qui nous renseigne sur la structure, pas évidente, de cet espace-temps.

https://preposterousuniverse.com/wp-...otes-seven.pdf, (p. 188-190)

Géodésiques circulaires de type espace

Pour calculer **les géodésiques** de type espace dans un TN, en métrique de Schwarzschild par exemple, en suivant,**https://preposterousuniverse.com/wp-...otes-seven.pdf**
(particulièrement p. 173-179)
qui utilise la méthode générale, avec les constantes du mouvement (énergie = E, moment angulaire = L, qui sont conservés sur une géodésique, car la métrique ne dépend ni de t ni de phi).
La forme obtenue en (7.48) P.174 est pratique pour déterminer les géodésiques circulaires.

On connait le résultat correspondant aux racines d'une équation du second degré, paires de géodésiques, pour une valeur du moment angulaire, une stable et une instable, et pas de solution pour r < 3 GM) pour les géodésiques circulaires de type temps et 1 seule géodésique instable, nulle pour r = 3GM, où l'invariant métrique est spécifié de type temps ou nul L'énergie associée est positive.

Pour les géodésiques de type espace il faut poser que l'invariant métrique est de type espace. Concernant les constantes du mouvement elles sont de même "type" mais adaptées pour le paramètre affine (appelons *E* l l'énergie et *L* le moment angulaire "spatial").

Si on considère que *L* est réel on obtient des géodésiques circulaires de type espace entre r = 0 et r = 3 GM.

Points clés extrait du document cité.

Constantes du mouvement

1- Conservation de l’énergie : $$E = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda} \qquad (1)$$

2- Conservation de moment angulaire : $$L = r^2\frac{d\phi}{d\lambda} \qquad (2)$$

3- Invariant métrique : $$\epsilon = -g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} \qquad (3)$$

L'invariant métrique ϵ vaut :

1 pour les intervalles d'espace-temps de type temps
0 pour les intervalles d'espace-temps de type nul (lumière)
-1 pour les intervalles d'espace-temps de type espace

Equation « géodésique » sous forme « hamiltonienne »

$$-E^2+\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{L^2}{r^2}+\epsilon\right)=0 \quad (4)$$

Mise sous forme hamiltonienne

On écrit cela comme suit :

$$\frac{1}{2}E^2=\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+V(r) \quad (5)$$

On reconnait une « forme Hamiltonienne » avec une énergie totale $E^2/2$, somme de l'énergie cinétique (premier terme du membre de droite) et une énergie potentielle V(r)

$$V(r)=\frac{1}{2}\epsilon-\epsilon\frac{GM}{r}+\frac{L^2}{2r^2}-\frac{GML^2}{r^3} \quad (6)$$

Solutions du problème

Pour déterminer les orbites circulaires de rayon rc on cherche les extrema du potentiel, pour cela on prend sa dérivée par rapport à r, ce qui donne :

$$\epsilon GM(r_c)^2-L^2(r_c)+3GML^2=0 \quad (7)$$

Equation du second degré qu'il est simple de résoudre pour les différents types d'espace-temps. Dans la référence citée c'est fait pour :

$$\epsilon=1 et \epsilon=0 \quad (8)$$

Cas des géodésiques de type temps et de type nul (voir les résultats dans la référence)

Pour $\epsilon=-1$, l'équation est

$$-GMr_c^2-L^2r_c+3GML^2=0 \quad (9)$$

Dont les solutions sont :

$$r_c = \frac{-L^2 +/- \sqrt{L^4 + 12G^2M^2L^2}}{2GM} \qquad (10)$$

Discussion sur les solutions

La racine est positive donne une solution pour 2GM < r_c < 3 GM pour L > 1 et 0< r_c <2 GM, pour L < 1 , la racine négative donne une solution où : 0 > rc > -∞.

Si on l'interprète comme une solution dans « l'anti-univers » (le trou blanc), où r serait négatif, ce qui a un sens dans la métrique de Painlevé, par exemple, (mais pas dans celle de Schwarzschild), alors ce n'est pas incohérent puisqu'on sait que la phénoménologie décrite par les mathématiques est « répulsive » dans le trou blanc. Cela ne préjuge en rien du caractère physique de cette solution.

Longueur d'une orbite de type espace.

De l'équation (2) $$L = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}$$

On déduit $$d\lambda = \frac{r^2 d\phi}{L} \qquad (11)$$

La longueur Λ de l'orbite circulaire s'obtient en intégrant Φ de 0 à 2π :

$$\Lambda = \frac{2\pi r^2}{L}$$

En utilisant λ comme paramètre affine de type espace et en utilisant l'équation (9) pour remplacer L^2 par sa valeur en fonction de r qui s'écrit :

$$L^2 = \frac{GM.r^2}{3GM - r} \qquad (12)$$

On arrive à :

$$\Lambda = \frac{2\pi r^2 \sqrt{3GM - r}}{\sqrt{GMr^2}} \qquad (13)$$

En simplifiant on obtient : $$\boldsymbol{\Lambda = \frac{2\pi r \sqrt{3GM - r}}{\sqrt{GM}}} \qquad \textbf{(14)}$$

On note que cette équation est définie pour r< 3GM et que les valeurs négatives de *r* sont (mathématiquement) autorisées. On peut calculer aussi la partie T de la période, associée à la composante temporelle t, si on le souhaite, à partir de l'invariant métrique de type espace.

$$-1 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \frac{L^2}{r^2} \longrightarrow dt^2 = \left(\frac{L^2}{r^2} - 1\right)\left(\frac{r}{r - 2GM}\right) d\lambda^2 \qquad (15)$$

En remplaçant L^2 par sa valeur donnée par (12) et en simplifiant :

$$dt^2 = \left(\frac{GM.r^2}{(3GM-r)r^2} - 1\right)\left(\frac{r}{r-2GM}\right)d\lambda^2 = \left(\frac{GM-(3GM-r)}{(3GM-r)}\right)\left(\frac{r}{r-2GM}\right)d\lambda^2 = \left(\frac{r-2GM)}{(3GM-r)}\right)\left(\frac{r}{r-2GM}\right)d\lambda^2 = \left(\frac{r}{(3GM-r)}\right)d\lambda^2 \qquad (15)$$

En intégrant, comme précédemment, sur le cercle de l'orbite pour Φ de 0 à 2π, on obtient une « pseudo- période » T'

$$T' = \frac{r}{3GM-r}\,\Lambda = \frac{2\pi\, r\sqrt{r}}{\sqrt{GM}} \qquad (16)$$

On retrouve la loi de Kepler, comme pour les géodésiques circulaires de type temps, mais notons qu'elle est réelle que pour ***r* non négatif** du fait de la racine carrée de r qui intervient !

Comparaison avec a géodésique circulaire de type temps : Géodésique circulaire de type temps.

Les calculs sont les mêmes que ceux fait pour les géodésiques de type espace mais avec l'invariant métrique ϵ qui vaut 1.

Pour une orbite circulaire géodésique de type temps, le paramètre affine est le temps propre τ , on peut vérifier, par la même méthode, qu'alors, la période de la géodésique s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau = \frac{2\pi r\sqrt{r-3GM}}{\sqrt{GM}}} \qquad \textbf{(14')}$$

L'expression est alors valide pour r > 3GM, conformément aux résultats connus.

Concernant la pseudo-période de paramètre « cordonnée temps » sa valeur :

$$T = \frac{r}{r-3GM}\,\tau = \frac{2\pi\, r\sqrt{r}}{\sqrt{GM}} \qquad (16')$$

Obtenue, par le même type de calcul que pour le cas de la géodésique de type espace, est également la même que celle donnée par la loi de Képler.

Notons que cette équation est valide jusqu'à r = 0, alors que la plus petite orbite circulaire géodésique vaut r = 3GM en relativité.

Les deux théories montrent leurs différences.