Etablissement des formules de Lorentz à partir de considérations de symétrie seulement.[1]

Introduction

Dans son article de 1905, pour établir les transformations de Lorentz, Einstein a posé 2 postulats.

1- **Principe de relativité : Tous les systèmes inertiels (référentiels galiléens) sont équivalents**.

   C'est une rupture totale avec la conception classique qui postulait un espace, a priori « immatériel », absolu qui était **la référence** donc différent des autres systèmes inertiels. Ceci était conforme aux habitudes de pensée jusque-là. Dans la conception d'Einstein, l'abandon d'un référentiel galiléen absolu fait qu'on ne peut plus parler alors de vitesse « absolue » de ces référentiels galiléens, on ne peut parler que de vitesse relative entre eux.

2- **La vitesse de la lumière est « invariante » on dit aussi « constante », dans tous les systèmes inertiels.**

Premières (lourdes) conséquences

Ces considérations qui paraissent a priori presque « anodines » vont être lourdes de conséquences. L'espace et le temps, pourtant considérées comme des données immédiates de notre conscience, ne sont plus les entités fondamentales à caractère physique. Comme l'a dit Minkowski, l'espace et le temps ne sont plus que les ombres (empreintes ou caractères ?) d'une entité plus fondamentale : l'espace-temps, qui n'est pas la somme ou la concaténation, comme sa dénomination trompeuse pourrait le laisser supposer, de l'espace et du temps mais une entité fondamentalement indivisible dont le feuilletage éventuel est arbitraire, les feuilles ne restituant ni le temps physique ni l'espace physique tels qu'ils étaient définis avant.

Les bases fondamentales de la mécanique « classique » étant détruites, tout doit être reconstruit et par conséquent repensé. C'est sans doute la difficulté majeure de cette théorie..

---

[1] *La méthode est dérivée de celle présentée par J.M Levy-Leblond. https://dspace.ist.utl.pt/bitstream/2295/52597/1/Levy-Leblond_(76).pdf.) qui a aussi été revendiquée par d'autres auteurs, voir par exemple (http://www.treeman9621.com/PDF%20LEVY-LEBLOND%20DID%20NOT%20CREATE%20LORENTZ%20TRANSFORMATIONS.pdf)*

L’espace-temps va présenter une structure « hyperbolique » quadridimensionnelle bien loin de la structure d’un espace euclidien tridimensionnel et d’un temps universel, régissant le cours de toute chose.

Les racines du bouleversement épistémologique

Lorentz avait établi empiriquement ses transformations pour expliquer le résultat négatif de l’expérience de Morley-Michelson. C’est une solution « ad hoc ».

Einstein va les fonder. Son premier postulat, le principe de relativité s’appuie sur une évidence : Dans un référentiel inertiel tel que défini, on ne ressent « rien » ; Dans le vide on « flotte ».

Comment distinguer un tel référentiel d’un autre par des expériences de physique dans une enceinte fermée, par exemple) ?

La puissance heuristique du principe de relativité

Lorsqu’on fait la démonstration des équations qui régissent les transformations entre 2 référentiels inertiels galiléens animés d’une vitesse relative v[2] , ce qui est fait dans l’annexe, sans faire appel au postulat 2 qui impose que la vitesse de la lumière soit constante, on voit apparaître malgré tout, un invariant de vitesse (qui n’en précise pas la valeur physique) qui joue un rôle important dans les transformations.

Le deuxième postulat devient presque inutile, sauf à préciser la valeur de cet invariant de vitesse.

Peut-on parler d’invariance de la vitesse de la lumière ?

Comme la relativité générale est une théorie géométrique de la gravitation, on peut considérer la relativité restreinte comme une théorie géométrique de la mécanique et de la physique (hors gravitation). L’importance de la structure de l’espace-temps de Minkowski avec ses 10 symétries (4 translations, 3 rotations spatiales, 3 boosts qui sont des rotations spatio-temporelles) ayant une structure de groupe (groupe de Poincaré) en est la démonstration.

A ce titre on peut attribuer cet invariant de vitesse, qui n'a nécessité aucune référence à la lumière, aux géodésiques nulles (des droites), une propriété géométrique.

Ainsi, on doit considérer la lumière, les ondes électromagnétiques en général, mais aussi les ondes gravitationnelles, comme n’étant que des « marqueurs » (comme les observateurs sur des

[2] On traite le problème à 1 dimension d’espace dans l’annexe : on définit des axes spatiaux x et x’ parallèles, x’ étant colinéaire de sa vitesse relative par rapport à x.. Pour la vitesse relative, on parle de boost, On peut ne traiter que ce cas sans réduire la généralité, car par une rotation spatiale qui ne change pas les lois, d’un des référentiels on peut rendre ces axes parallèles

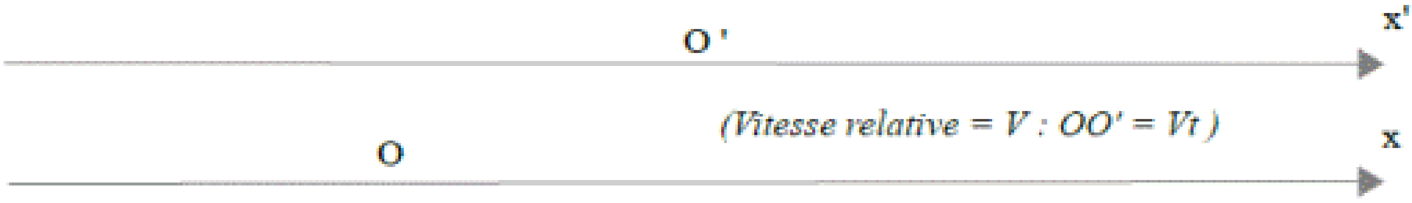
géodésiques de type temps) de cette propriété. Autrement dit ceci tend à considérer que cette limite de vitesse n'est pas une propriété physique intrinsèque à la nature de la lumière. On doit alors se demander quelles qualités doit posséder un phénomène pour être associé à ces géodésiques nulles, (portée infinie ?).

Ce point sur la nature des géodésiques nulles est traité dans des pages de ce site (formalisme de Newman-Penrose). La compréhension de ce phénomène est sans doute une des clés de la compréhension de la relativité.

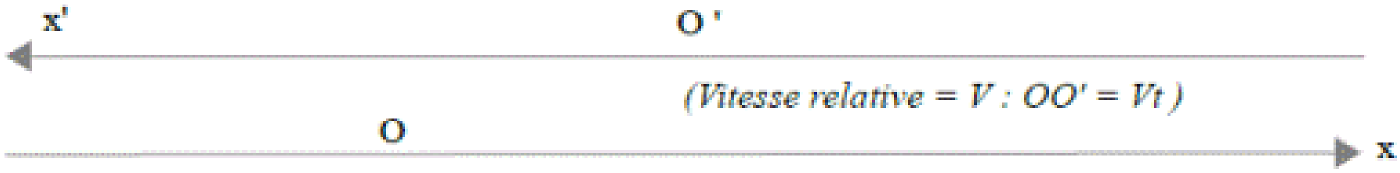
Annexe : une démonstration des formules de Lorentz par le principe de relativité

C'est l'existence de référentiels inertiels ne se différenciant que par une vitesse relative, dans lesquels les lois de la physique sont identiques et qui sont tous équivalents, qui impose un invariant qui va se révéler intervenir dans les équations comme une vitesse indépassable.

Recherchons la transformation de Lorentz le long de deux axes Ox et $O'x'$ glissant l'un sur l'autre avec la vitesse relative constante V.



Afin d'obtenir une symétrie parfaite entre les deux référentiels retournons l'axe $O'x'$.



l'homogénéité conduira à une transformation linéaire et si nous choisissons $t = t' = 0$ en O et O' quand ils se croisent, les transformations $(x, t) \rightarrow (x', t')$ et $(x', t') \rightarrow (x, t)$ seront données comme suit avec huit constantes appropriées A à D'

$$x' = Ax + Bt, \qquad t' = Cx + Dt,$$
$$x = A'x' + B't', \qquad t = C'x' + D't'. \qquad (1)\text{-}(4)$$

Le principe de relativité et la symétrie de la configuration conduisent à :

$$A = A', \qquad B = B', \qquad C = C', \qquad D = D'. \qquad (5)$$

De plus en O' nous avons $x' = 0$ et $x = Vt$, donc

$$x' = Ax + Bt, \qquad (5\text{-}1)$$

entraîne

$$AV + B = 0 \quad \rightarrow B = -AV, \qquad (5\text{-}2)$$

De même

$$x = Ax' + Bt' \quad \rightarrow Vt = Bt' \rightarrow t = Bt'/V \quad \text{et} \quad t = Cx' + Dt' \rightarrow t = Dt',$$

entraînent

$$B = DV \qquad \text{et donc} \qquad D = -A, \text{ d'après } (5\text{-}2). \qquad (5\text{-}3)$$

Enfin en substituant x' et t' par leurs valeurs et en tenant compte de *(5-2)* et *(5-3)* :

$$x = Ax' + Bt' = A(Ax + Bt) + B(Cx + Dt) \rightarrow (1 - D^2 + CDV)x = (-DB+DB)t = 0, \qquad (6)$$

$$t = Cx' + Dt' = C(Ax + Bt) + D(Cx + Dt) \rightarrow (1 - D^2 - CDV)\, t = (-CD + CD)x = 0.$$

donc :

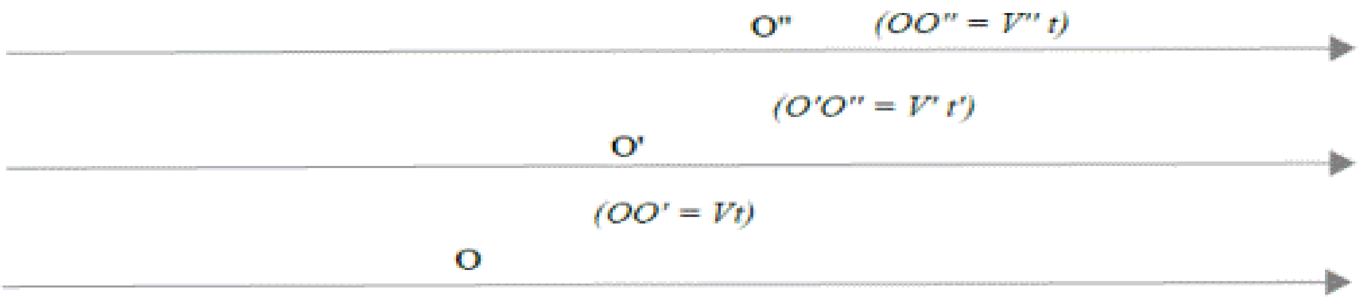
$$D^2 + CDV = 1, \qquad \text{soit } C = (1 - D^2) / DV.$$

La transformation $(x, t) \rightarrow (x', t')$ devient donc :

$$x' = -Dx + Dvt, \qquad t' = [(1 - D^2) / DV]x + Dt. \qquad (7)$$

La seule inconnue restante, D, est une fonction de la vitesse V qui peut être déterminée par la comparaison de plusieurs vitesses.

Retournons à nouveau $O'x'$ et considérons trois axes Ox, $O'x'$ et $O''x''$ de même sens.



La relation *(7)* devient, avec le signe opposé pour x'

$$x' = D(x - Vt), \qquad t' = [(1 - D^2) / DV]x + Dt, \qquad (8)$$

et pareillement, avec D' pour V' et D'' pour V''.

Ce nouveau D' est indépendant de celui de *(4)-(5)*, lequel n'est plus utilisé après *(5)* :

$$x'' = D'(x' - V't'), \qquad t'' = [(1 - D'^2)/D'V']x' + D't', \tag{9}$$

$$x'' = D''(x - V''t), \qquad t'' = [(1 - D''^2)/D''V'']x + D''t. \tag{10}$$

Éliminons alors x' et t' en *(9)* en utilisant *(8)*, nous obtenons une autre expression de *(10)* :

$$x'' = \{DD' + [D'V'(D^2 - 1)/DV]\}x - DD'(V + V')t, \tag{11}$$

$$t'' = \{[(D - DD'^2)/d'V'] + [(D' - D^2D')/DV]\}x + \{Dd' + [DV(D'^2 - 1)/D'V']\}t.$$

L'identification de *(10)* et de *(11)* conduit aux quatre égalités suivantes :

$$D'' = DD' + [D'V'(D^2 - 1)/DV], \tag{12}$$

$$D''V'' = DD'(V + V'), \tag{13}$$

$$(1 - D''^2)/D''V'' = [(D - DD'^2)/D'V'] + [(D' - D^2d')/DV], \tag{14}$$

$$D'' = DD' + [DV(D'^2 - 1)/D'V']. \tag{15}$$

Donc, avec *(12)* et *(15)*:

$$D'' - DD' = D'V'(D^2 - 1)/DV = DV(D'^2 - 1)/D'V'. \tag{16}$$

La dernière égalité permet de définir la quantité K par :

$$K = D^2V^2/(D^2 - 1) = D'^2V'^2/(D'^2 - 1). \tag{17}$$

La quantité K à la même valeur pour deux vitesses arbitraires (et leur D correspondant), elle est donc constante pour toutes les vitesses.

D'autre part le cas $V = 0$ donne $x = x'$ et $t = t'$, donc $D = 1$ en *(8)*, il nous faut donc choisir la solution positive de *(17)* :

$$D = (1 - V^2/K)^{-1/2}. \tag{18}$$

On obtient ainsi, avec *(8)*, la transformation $(x, t) \to (x', t)$ et Poincaré l'étend sans difficulté à la transformation générale $(x, y, z, t) \to (x', y', z', t')$.

$$x'=(x - Vt)\ (1-V^2/K)^{-1/2}, \qquad y'=y, \quad z'=z, \quad t'=[(t-(Vx/K)]\ (1-V^2/K)^{-1/2}. \tag{19}$$

Il reste à déterminer la constante K.

Si elle est infinie, la transformation est celle de Galilée.

Si $K = c^2$, la transformation est celle de Lorentz.

Bien entendu ces deux transformations sont très voisines lorsque le rapport V/c est faible.

La constante K ne peut être négative (il deviendrait possible de remonter dans le temps) et sa racine carrée apparaît comme une vitesse limite indépassable.

Ceci est confirmé par la racine carrée $(1-V^2/K)^{1/2}$ et aussi par la composition des vitesses déduite de *(12)* et *(13)*

$$V'' = (V+V')/\,[1 + (VV'/\,K)] \qquad \text{soit avec } K = k^2,$$

$$(k - V'')/(k+V'') = [(k-V)/(k+V)].[(k-V')/(k+v')],$$

donc $|V|$ et $|V'| < k$, entraînent $|V''| < k$.

Très naturellement Poincaré et Lorentz ont choisi $K = c^2$, ce qui s'accorde avec l'invariance de la vitesse de la lumière et avec la conservation des équations de Maxwell dans les référentiels inertiels.

On peut cependant remarquer que, si nécessaire, il reste possible que K soit très légèrement supérieur à c^2. Les photons auraient alors une masse très petite mais non nulle, et leur vitesse, la vitesse de la lumière, serait une fonction très légèrement croissante de leur énergie et tendrait vers $(K)^{1/2}$ quand leur énergie augmenterait indéfiniment.