

**La valeur des constantes  $G$  et  $c$  est-elle imposée par l'univers ?**

**Longueur de Planck, temps de Planck et masse de Planck**

# Longueur, temps et masse de Planck

La longueur de Planck, le temps de Planck et la masse de Planck seront définis à partir des constantes fondamentales de la physique qui sont la vitesse de la lumière notée  $c$ , la constante gravitationnelle notée  $G$  et la constante de Planck notée  $h$ , en utilisant des arguments dimensionnels.

Dans le système MKS, leurs valeurs sont :

- $c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$ ,
- $G \approx 6,674\,30 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ,
- $h \approx 6,626\,070\,040 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$
- $\hbar \approx 1,054\,571\,800 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$

- Pour  $c$ ,  $c$ 'est une valeur exacte (par définition), les autres sont des valeurs mesurées donc des valeurs approchées, la valeur de toutes ces constantes n'est pas prédite par la théorie, elles sont appelées paramètres libres. Les dimensions de ces constantes sont répertoriées.

- La longueur de Planck  $l_p$  sera donc définie par le produit le plus simple de ces constantes qui a la dimension d'une longueur, pour le temps  $t_p$  et la masse de Planck  $m_p$ , c'est le même principe mais pour un temps et une masse. Cela donne :

- $m_p = (hc / G)^{1/2} \approx 2177 \times 10^{-8} \text{ kg},$

- $t_p = (hG / c^5)^{1/2} \approx 5\,391 \times 10^{-44} \text{ s}$

- $l_p = c \cdot t_p = (hG / c^3)^{1/2} \approx 1,616 \times 10^{-35} \text{ m},$

## • Force de Planck

- En utilisant la loi  $f = m \gamma$ , où  $f$  est la force appliquée à la masse  $m$  et  $\gamma$  l'accélération résultante, en utilisant les valeurs de Planck pour les opérands, on obtient,
- $f_P = m_P \gamma_P$ , avec,  $\gamma_P = l_P / (t_P^2) \rightarrow$
- **$f_P = c^4 / G \approx 1.21 \times 10^{44}$  Newtons (m.kg.s<sup>-2</sup>)**
- Cette valeur énorme est indépendante de la valeur de la constante de Planck ! En d'autres termes, quelle que soit la valeur de  $h$ , on obtient ce résultat !

# La force de Planck dans l'équation d'Einstein

- Pour assurer l'homogénéité de l'équation d'Einstein, il faut multiplier le tenseur d'Einstein par une constante dimensionnée comme une force.
- Mais, quelle est la valeur de cette constante dimensionnée ? Il est remarquable, que comme le montre l'équation d'Einstein ci-dessous, qu'à un facteur  $8\pi$  près c'est la force de Planck qui figure dans cette équation.

$$\bullet \quad G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \rightarrow \frac{c^4}{G} G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \rightarrow f_p G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

- A ce titre, il ne va pas être étonnant, comme nous allons le montrer, de la retrouver en relativité générale dans sa présentation de nombreux domaines physiques

# La force de Planck dans l'équation d'Einstein

- Si on peut considérer cela comme une simple nécessité mathématique, on peut aussi s'interroger sur l'information qu'apporte la force de Planck qui est cette constante dimensionnée.
- En effet c'est cette constante qui fait le lien entre le modèle formel géométrique et la physique, entre l'esprit et la matière. En mécanique Newtonienne la constante de gravitation  $G$  joue un rôle primordial dans la théorie, localement et globalement, il devrait en être de même pour la force de Planck que allons considérer aussi universelle dans la suite.
- Ajoutons si la présence de  $G$  est liée à la convergence des théories en champ faible et peu variables, où la relativité générale doit rejoindre la théorie de Newton, la présence de  $c$  est spécifique à la relativité.

# La force de Planck dans l'équation d'Einstein

- En effet, elle est liée à l'existence d'une « vitesse » maximale, ce qui n'existe pas en mécanique classique. Plus rigoureusement, cela est lié à l'existence de géodésiques nulles, une propriété structurelle de l'espace-temps, la lumière n'en étant qu'un marqueur.
- C'est cette contrainte qui confère à cet espace-temps cette structure hyperbolique si particulière.
- Notons que, dans l'espace-temps défini par la relativité générale, seules les géodésiques ont un caractère physique. Des lignes non géodésiques de la géométrie font intervenir d'autres phénomènes que la gravitation. Il faudra alors définir un couplage avec ces phénomènes au niveau de l'espace tangent. C'est une « extension » de la théorie.

# La force de Planck dans l'équation d'Einstein

- Einstein a mis plusieurs années pour comprendre cela, quand il a voulu assurer la compatibilité avec la théorie Newtonienne.
- Il a fini par réaliser que c'était seulement au niveau de l'équation géodésique que cette compatibilité pouvait seulement se faire.
- Si l'équation du champ (équation d'Einstein) définit un continuum espace-temps, sa propriété essentielle est de définir les géodésiques.
- L'espace-temps n'est pas un ensemble de points mais un ensemble de géodésiques. Ce sont des courbes spatio-temporelles : i.e des courbes de même projection spatiale, mais avec un boost différent, sont différentes. Chacune définit une infinité de points, dont l'assemblage définit tous les points. Cette structure est décrite par la « congruence de géodésiques ».



# **La force de Planck est-elle une constante universelle de l'univers en relativité ?**

- La relativité générale est une théorie géométrique de la gravitation.
- Le modèle théorique est donc représenté par le membre de gauche qui est la partie géométrique, de l'équation.
- C'est ce qu'on doit associer à l'esprit du physicien qui a conçu la théorie.

# Justification par l'équation d'Einstein

- Le membre de droite qui exprime des contraintes physiques va amarrer cette belle construction intellectuelle au monde « réel », décrit par les phénomènes physiques, les seuls qui nous soient accessibles et qui vont être l'objet d'expériences pour valider le modèle théorique.
- Cet amarrage se fait via cette « force » de Planck qui joue le rôle d'un médiateur (constante de couplage) entre le monde théorique et le monde physique.
- La nature de cette constante de couplage doit nous éclairer sur la nature de la théorie. Le fait que ce soit une « force » a une signification que nous allons chercher à comprendre.

# Justification par l'équation d'Einstein

- Rappelons-nous que le credo d'Einstein pour qualifier la cosmologie relativiste de cosmologie scientifique est que, contrairement à l'approche classique il n'y a pas un contenant (l'univers) et un contenu (les objets astrophysiques qui le peuplent), mais que cela fait un tout indissociable (un espace-temps) et que de ce fait, le monde sensible (les phénomènes) nous donne accès à la structure et caractéristiques de l'univers qui est un espace-temps.
- Notons au passage que dans cette approche, le temps et l'espace n'existent plus en tant qu'unités fondamentales et ne sont que des « ombres » (comme dans la caverne de Platon) de l'espace-temps, seule entité à laquelle on peut accorder un statut de grandeur physique fondamentale.

# Justification par l'équation d'Einstein

- Quoi qu'il en soit, quelle que soit la géométrie, c'est toujours cette constante qui s'applique, donc à ce titre, comme on doit la retrouver partout dans toutes les solutions, on est alors fondé à la considérer comme une constante.
- Elle a été construite à partir des grandeurs de Planck mais ne dépend pas de la constante de Planck, ce qui lui permet d'être valable à toutes les échelles.
- Puisqu'elle ne dépend pas de la valeur de la constante de Planck, peut-on la définir autrement ?
- De sa nature, on voit qu'il faudrait une définition à partir de  $G$  et  $c$ , ce que l'analyse dimensionnelle nous donnerait.

# Justification par la deuxième loi de Newton

- Mais, par ailleurs, sa justification épistémologique pourrait aussi venir de la deuxième loi de Newton  $f = m \gamma$ , avec une valeur de  $m$  qui serait la masse de l'univers, la masse la plus grande par opposition à la masse de Planck qui est la plus petite.
- Cela nous donnerait alors une valeur d'une accélération  $\gamma$ , dont la nature serait reliée à l'univers.
- Dans des compléments voir: « **L'énergie noire est-elle l'énergie du vide à l'échelle de l'univers?** » sur ce même site, nous montrons comment cela pourrait expliquer la tension sur la mesure de la constante de Hubble..
- Nous étudierons ces possibilités dans le cours du document.

# Énergie du vide quantique

- A l'échelle de Planck cette relation intervient dans le calcul de ce qu'on appelle l'énergie du vide. Cette énergie du vide possède une phénoménologie d'antigravité qui pourrait expliquer "l'énergie noire" de même phénoménologie, qui se manifeste par une constante cosmologique dans les équations d'Einstein, s'il n'y avait pas un désaccord monstrueux dans les ordres de grandeurs.
- La constante cosmologique résultant de l'énergie du vide serait  $10^{122}$  fois plus importante que ce qu'on observe et qu'on mesure dans l'univers.
- Commençons par souligner que l'on retrouve la force de Planck également dans d'autres phénomènes, tels que :

# Ondes gravitationnelles

- L'amplitude « a » de l'étirement et de la compression de l'espace est donnée par la formule :  $a \approx [2G / (c^4 r)] Q''(t - r/c)$
- On remarque la constante :  $2G / c^4 \approx 1,65 \times 10^{-44} \text{ m}^{-1} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^2$
- Cette constante, de valeur minuscule, qui a la dimension de l'inverse d'une force, qui intervient en facteur multiplicatif dans « l'élasticité [\[4\]](#) » de l'espace, montre que l'espace est très rigide .
- Sa valeur est le double de l'inverse de la force de Planck. Q est le quadripôle du système émettant des ondes gravitationnelles, Q'' est sa dérivée seconde, par rapport au temps. Dans cet exemple, remarquons que la force de Planck intervient dans un phénomène qui concerne l'espace tout entier. Ceci est de nature à conforter son utilisation à l'échelle de l'univers.

# Force gravitationnelle de 2 trous noirs en contact

- Un trou noir de masse  $M$  a un rayon de Schwarzschild  $r_s$  (définissant un horizon) qui vaut :  $r_s \approx 2GM / c^2$ .
- Si nous utilisons la loi
- $f = G m_1 m_2 / R^2$  avec  $m_1 = m_2 = M$ .
- Lorsque 2 trous noirs (qu'on a choisi identiques pour simplifier) sont en contact, leur distance à leurs centres est  $R = 2r_s$ . L'insertion de ceci dans l'équation précédente donne :
- $f = G M^2 / (2r_s)^2 = (c^4 GM^2) / (4GM)^2 = c^4 / 16G$
- On retrouve toujours ce même facteur :  $c^4 / G$
- Notons que l'on peut considérer cette force comme la force gravitationnelle maximale entre deux corps distincts puisqu'au-delà, les corps vont s'interpénétrer et perdre leur identité en fusionnant.



# Force gravitationnelle de 2 trous noirs en contact

- Notons la relation entre cette notion de force maximale et la rigidité de l'espace qu'on pourrait interpréter comme le fait qu'au-delà de cette force le continuum espace-temps se « déchirerait ».
- La valeur de cette constante dans les différentes phénoménologies que nous décrivons n'est pas fortuite car cette constante dimensionnée est celle qui est utilisée (à un facteur multiplicatif non dimensionné près) dans l'équation d'Einstein pour assurer son homogénéité.
- En effet, la relativité générale étant une théorie géométrique de la gravitation, il convient pour assurer l'homogénéité entre un membre géométrique et un membre physique, d'introduire une constante dimensionnée. Ce qui est intéressant c'est que cette constante a la dimension d'une force! Il faut donc s'attendre que ce concept de force joue un rôle essentiel en relativité.

# Invariance de la force de Planck appliquée à l'univers

- Ce facteur  $c^4 / G$ , la force de Planck, joue un rôle qui manifestement ne se limite pas qu'au domaine microscopique régi par la mécanique quantique.
- En particulier, comme nous l'avons indiqué, sa présence régissant l'élasticité de l'espace dans les équations des ondes gravitationnelles montre qu'elle intervient à l'échelle de l'univers.
- Puisque cette force « Planck » est indépendante de la valeur de la constante de Planck, faisons **l'hypothèse hardie**, que nous commenterons et critiquerons dans un chapitre ultérieur, que la force de Planck s'applique pour une valeur d'une constante de Planck modifiée, notée  $h_u$ , ( $h$  univers) où « la masse de Planck modifiée » serait par exemple égale à celle de l'univers. Notons que nous pouvons, tout aussi bien, considérer la taille de l'univers ou l'âge de l'univers pour déterminer l'échelle à considérer. Ces points seront discutés.

# Invariance de la force de Planck appliquée à l'univers

- L'idéal, comme nous ne faisons aucune hypothèse sur le modèle cosmologique à l'exception du fait qu'il est homogène et isotrope, serait de prendre un critère expérimental (une observable indépendante du modèle) pour déterminer cette échelle.
- Le choix de la masse peut paraître inappropriée car, par l'approche que nous faisons, la force de Planck est liée à la constante cosmologique où la masse semble absente. Mais, prendre les autres paramètres (taille et âge) semblent se révéler équivalents dans la méthode que nous suivons. Optons donc pour la masse.
- Les données actuelles attribuent une masse d'environ cent milliards ( $10^{11}$ ) de masses solaires à notre galaxie (y compris matière noire) et le nombre de galaxies est estimé à environ 1000 milliards,  $10^{12}$  (ces chiffres sont récents, les chiffres antérieurs ont été révisés à la hausse).

# Invariance de la force de Planck appliquée à l'univers

- Notons que ce comptage qui peut paraître “objectif” comporte de larges extrapolations et suppose implicitement une certaine taille à l'univers puisqu'il faut le considérer dans sa totalité et pas seulement dans sa partie observable.
- Avec  $10^{12}$  galaxies de  $10^{11}$  masses solaires et une masse solaire de  $\approx 2 \times 10^{30}$  kg, nous obtenons :
- Masse de l'univers =  $M_u \approx 2 \times 10^{53}$  kg.
- Comme la masse de Planck, ( $m_p \approx 2 \times 10^{-8}$  kg), il faut multiplier par un facteur  $\mathbf{K} \approx \mathbf{10^{61}}$ , pour obtenir la masse de l'univers avec la formule donnant la masse de Planck. Comme dans la définition de la masse de Planck, c'est sa racine carrée qui est impliquée, la constante  $h_u$  à utiliser, à la place de la constante de Planck  $h$ , est telle que :  $\mathbf{h_u} \approx \mathbf{10^{122} h}$ .

# Énergie du vide et constante cosmologique

- Pour expliquer l'accélération de l'expansion de l'univers, on a introduit le concept d'énergie noire.
- Une solution mathématique pour l'énergie noire est la constante cosmologique.
- Comme l'énergie du vide produit une phénoménologie de ce type (répulsion) on a pensé qu'elle pourrait fournir une explication physique à cette constante cosmologique.
- Cette hypothèse a été écartée en raison d'un énorme écart (autour de  $10^{122}$ ) entre la valeur calculée de la constante cosmologique résultant de l'énergie du vide et sa valeur actuelle, mesurée par les cosmologistes.

# Énergie du vide et constante cosmologique

- Rappelons que le vide, considéré comme un champ quantique (solution de type oscillateurs harmoniques), de valeur d'énergie minimale  $E = h.c/(2.l)$  dans un volume  $l^3$ , fait débat.
- Même en imposant que la longueur  $l$  soit supérieure à la longueur de Planck, cela donne une énergie par  $m^3$  d'environ  $10^{113}$  Joules ce qui est énorme dont on a du mal à donner une signification physique.
- Si la cosmologie moderne est une application de la théorie de la relativité où on peut modéliser par une constante (constante cosmologique) dans l'équation d'Einstein, un fluide, non quantique, qui a les propriétés du vide, elle n'explique rien au niveau de sa nature physique.

# Énergie du vide et constante cosmologique

- Mais, poursuivant notre analyse dimensionnelle, l'énergie du vide doit être calculée non pas avec la constante physique de Planck  $h$  mais avec  $h_u$ , où  $c$ 'est l'univers qui donne l'échelle, qui introduit le facteur  $10^{122}$ .
- La dimension de la constante cosmologique étant  $[L]^{-2}$  (inverse d'une longueur au carré) cela peut s'obtenir en calculant  $(T.c)^{-2}$ , où  $T$  est l'âge de l'univers et  $c$  la vitesse de la lumière.
- Le calcul avec un âge de 13,7 milliards d'années donne une valeur de  $0.6 \cdot 10^{-52} \text{ m}^{-2}$ , à comparer avec la valeur mesurée de  $1.088 \cdot 10^{-52}$ .

# Énergie du vide et constante cosmologique

- Cette valeur sous-évaluée s'explique par le fait que dans notre analyse dimensionnelle nous ne prenons pas en compte la matière (baryonique et noire) dont l'effet, contraire à celui de la constante cosmologique, est de ralentir l'expansion.
- La valeur obtenue par l'analyse dimensionnelle correspond à une phénoménologie qui serait seulement due à la constante cosmologique. Elle est donc sous-évaluée, car en ne prenant pas en compte l'effet contraire de la matière.
- **Nous constatons que l'énergie du vide, ainsi évaluée, rend compte, en ordre de grandeur, de l'énergie noire constatée et de la valeur de la constante cosmologique associée.**



# Justification de la pertinence physique du changement d'échelle.

- D'un point de vue physique cette proposition peut être étayée par des considérations statistiques.
- On peut découper l'univers en cellules microscopiques.
- Au niveau d'une cellule microscopique l'état du vide qui subit des fluctuations liées au processus de création/annihilation de paires particule-antiparticules peut être représenté par une variable aléatoire gouvernée par une loi statistique, de Poisson par exemple.
- Dans tous les points du vide de l'univers les variables aléatoires associées à ces microcellules sont indépendantes.

# Justification de la pertinence physique du changement d'échelle.

- La statistique nous dit que la courbe de distribution de la variable aléatoire de l'état du vide résultant de toutes ces variables aléatoires à l'échelle de l'univers est une variable aléatoire qui tend, quelle que soit la loi statistique au niveau microscopique, vers une loi de distribution normale (gaussienne) dont les paramètres, moyenne et variance, se calculent à partir des lois microscopiques et de la configuration de l'univers en termes microscopiques.
- Dans ces conditions, une énergie du vide à une échelle de l'univers a un sens physique et cette hypothèse peut être envisagée.

# Longueur de Planck et temps de Planck à l'échelle de l'univers.

- Pour calculer la longueur  $L$  et le temps  $T$  associés à l'échelle de l'univers, avec la même « force de Planck », les valeurs de l'échelle de Planck doivent être multipliées par:

- $K \approx 10^{61}$ .

- En appliquant ceci, nous obtenons :

- $L \approx l_p \times 10^{61} \approx 1,6 \times 10^{-35} \times 10^{61} \text{ m} \approx 1,6 \times 10^{26} \text{ m} \approx 1,7 \times 10^{10} \text{ al} :$   
17 milliards d'années-lumière.

- $T = t_p \times 10^{61} \approx 5,4 \times 10^{-44} \times 10^{61} \text{ s} \approx 5,4 \times 10^{17} \text{ s} \approx 1,7 \times 10^{10} \text{ ans}.$   
Cela fait 17 milliards d'années.

# Longueur de Planck et temps de Planck à l'échelle de l'univers.

- Compte tenu des inexactitudes dans les estimations de la masse de l'univers, on voit que l'on obtient des chiffres qui sont de l'ordre de grandeur de ce qui est adopté aujourd'hui, surtout si on tient compte du fait que la dynamique de l'univers décrit dans la méthode serait régie que par la constante cosmologique.
- A l'inverse, pour obtenir les chiffres corrects, il suffirait de corriger la masse de l'univers où, par exemple, le nombre de galaxies serait estimé à 800 milliards, au lieu de 1000 milliards, ce qui introduit un facteur de **0.8** dans les données ainsi calculées.

# Calcul de la constante de Hubble

- Notons qu'on pourrait aussi calculer la constante de Hubble  $H_0$  (on prend la valeur  $70 \text{ km/s/Mpc}$ , où Mpc est l'abréviation de mégaparsec) en considérant l'accélération de Planck,  $a_p$  pour l'univers où  $F_p$  est la force de Planck et  $M_U$  la masse de l'univers :
- $a_p = F_p/M_U = 1.21 \times 10^{44} / (1.6 \times 10^{53}) = 7.5 \times 10^{-10} \text{ m.s}^{-2}$  et en comparant cette valeur à:
- $c.H_0 = 3 \times 10^8 \times 2.27 \times 10^{-18} = 6.8 \times 10^{-10} \text{ m.s}^{-2}$
- Qui a aussi la dimension d'une accélération.
- La valeur de la constante de Hubble, déduite de l'analyse dimensionnelle par  $a_p/c \approx 77 \text{ km/s/Mpc}$ ,. Elle est surévaluée de 10% par rapport à notre hypothèse, mais nous restons dans les ordres de grandeur.

**Numérologie ou propriété  
structurelle ?**

# Numérologie ?

- Il semble assez surprenant qu'en ne faisant aucune hypothèse sur le modèle cosmologique, sur l'univers et sur son contenu, en utilisant uniquement la constante gravitationnelle  $G$ , la vitesse de la lumière  $c$ , avec la notion de force de Planck comme un lien unificateur, entre les échelles puisqu'elle n'en dépend pas, on obtienne les ordres de grandeur de l'univers, du moins tels qu'ils sont estimés aujourd'hui.

# Propriété structurelle : C'est l'univers qui détermine la valeur de $c$ et $G$ !

• Une explication raisonnable serait, qu'en fait, ces paramètres libres, ne sont pas libres du tout, mais sont déterminés par l'univers car liées à sa composition et à sa structure ! Autrement dit, si nous avons mesuré l'âge  $T$ , la taille  $L$  et la masse  $M$  de l'univers, nous pouvons en déduire les valeurs de  $c$  et  $G$  par les équations suivantes :

• De  $L = c \cdot T$ , on tire:

•  $c = L / T = (1,6 \times 10^{26} \text{ m}) / (5,4 \times 10^{17} \text{ s})$ , soit:

•  **$c \approx 3 \times 10^8 \text{ m / s}$**

• De  $f_p = c^4 / G = M \cdot L / T^2$ , on tire:

•  $G = c^4 T^2 / M L = L^4 T^2 / T^4 M L = L^3 / (M T^2) \approx (1,6 \times 10^{26} \text{ m})^3 / [(2 \times 10^{53} \text{ kg}) (5,4 \times 10^{17} \text{ s})^2]$ , soit:

•  **$G \approx 7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$**



- Les résultats sont approximatifs du fait des arrondis, car, dans l'exemple, nous n'avons gardé que deux chiffres dans les nombres pour le calcul.
- Avec tous les chiffres significatifs dans les nombres, par construction, des valeurs  $T$ ,  $L$  et  $M$ , évidemment, nous récupérerions les bonnes valeurs.
- Soulignons qu'il nous fallait ces deux équations, deux contraintes, dont celle nouvelle de la "force de Planck", pour calculer les valeurs des deux inconnues  $G$  et  $c$ .

- Par conséquent, dans cette approche, la “force de Planck”, une contrainte nouvelle et inattendue, est nécessaire.
- Son interprétation physique est “l’élasticité” de l’espace, un concept utilisé pour les ondes gravitationnelles, lié à l’inertie de l’espace.
- Nous développons ce point dans un chapitre ultérieur.
- Cela nous incite à explorer une analyse où elle jouerait un rôle primordial, en escomptant que ce nouveau fil directeur pourrait contribuer à éclairer la compréhension de la théorie.

# Une approche heuristique

- Le principal reproche est qu'il s'agit d'une approche dimensionnelle qui, même si sa contribution heuristique est précieuse, n'est pas une théorie physique rigoureuse.
- C'est vrai, mais néanmoins, une telle approche nous a apporté des informations intéressantes, qui étaient probablement cachées dans les paramètres que nous avons utilisés.
- Au moins, elle a permis d'extraire cette information de ces paramètres, et il n'est pas sans espoir qu'il puisse fournir une ligne directrice à une nouvelle théorie.

# Une approche heuristique

- De plus, dans ce document, nous n'avons pas toujours respecté l'approche relativiste.
- Mais étant une étude sur des ordres de grandeur, où l'on fait des hypothèses audacieuses, par exemple, l'estimation de la masse totale de l'univers, qui a considérablement évolué au cours des 20 dernières années, les résultats de ces approximations sont, au moins, instructifs.