

## Espaces à symétries maximum<sup>1</sup>

### 1-Problème à résoudre – généralités sur les symétries des espaces

Quel niveau de symétries pour un espace ? Un espace à  $n$  dimensions  $R^n$  de métrique euclidienne est invariant par les translations et rotations autour de tout point  $P$ . Il y a  $n$  translations linéairement indépendantes et comme il y a  $n$  axes de rotations, autour de chaque axe considéré il y a  $n-1$  rotations des autres axes, mais compte tenu qu'une rotation de  $x$  vers  $y$  est la même que  $y$  vers  $x$  il faut diviser l'ensemble par 2. Ceci fait donc :  $\frac{1}{2} n(n-1)$  rotations.

Au total cela fait :  $n + \frac{1}{2} n(n-1) = \frac{1}{2} n(n+1)$

En espace de Minkowski de signature Lorenzienne, certaines rotations sont des boosts.

Pour des espaces non euclidiens, il existe des espaces comme la sphère, et les hypersphères qui sont aussi à symétrie maximum, ainsi que leurs équivalents de type hyperbolique.

Si la variété non euclidienne représentant l'espace-temps est à symétrie maximum sa courbure doit être la même partout et dans toutes les directions (homogène et isotrope). Si nous la connaissons en un point alors nous la connaissons pour tous les points. Il y a peu d'espaces à symétrie maximale.

\*\*\*\*\*

### Quelques rappels :

Le tenseur de Riemann s'écrit :

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}$$

Où  $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$  est un symbole de Christoffel qui vaut :

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu})$$

Où  $g_{\mu\nu}$  est la métrique et  $g^{\lambda\sigma}$  la métrique inverse définie par :

$$g^{\mu\rho} \cdot g_{\rho\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$$

Où  $\delta^{\mu}_{\nu}$  est le symbole de Kronecker qui vaut 1 pour  $\mu = \nu$  et zéro sinon.

Rappelons que la métrique et la métrique inverse permettent respectivement d'abaisser et d'élever des indices dans les tenseurs. Ainsi la version du tenseur de Riemann avec tous les indices bas s'écrit :

$$R_{\lambda\sigma\mu\nu} = g_{\lambda\rho} R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$$

---

<sup>1</sup> Ce document reprend des éléments du livre « Spacetime and geometry de S. Carroll (Addison Wesley) » à consulter pour plus de détails, et en développe certains éléments.

On doit sommer sur l'indice  $\rho$  de 0 à 3 sur son expression pour réaliser l'opération.

Le tenseur de Ricci  $R_{\mu\nu}$  qui est la contraction du tenseur de Riemann s'écrit :

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu}$$

Conformément à la notation d'Einstein, on contracte en sommant sur l'indice  $\rho$  de 0 à 3.

Quant au scalaire de Ricci  $R$ , il vaut :

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

\*\*\*\*\*

Les variétés à symétrie maximale sont classées par la valeur du scalaire de courbure de Ricci  $R$  qui sera constant partout, le nombre de dimensions  $n$ , la signature de la métrique et la topologie (distinguer un  $n$ -tore de l'espace euclidien  $R^n$ ).

Pour de tels espaces nous pouvons reconstruire le tenseur de Riemann à partir du scalaire de Ricci  $R$

## 2- Solution proposée

L'idée est que, comme la géométrie est la même dans toutes les directions, le tenseur de courbure doit être le même dans toutes les directions. Comment faire ? Choisissons des coordonnées locales (indices en gras) inertielles à un point  $P$  telles que  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ . Ces coordonnées locales ne sont pas uniques.

Comme la géométrie est à symétrie maximale imposons que les composantes du tenseur de Riemann soient de même et qu'elles ne doivent pas changer par application d'une transformation de Lorentz.

Il n'y a que peu de tenseurs qui ont cette propriété, la métrique, le tenseur de Kronecker et celui de Levi-Civita. Cela implique que le tenseur de Riemann, dans ces coordonnées doit être proportionnel à un tenseur construit à partir de ces tenseurs invariants.

Comme ce tenseur doit respecter les symétries intrinsèques du tenseur de Riemann<sup>2</sup>, la seule solution est :

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = k. (g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu} g_{\sigma\mu})$$

---

<sup>2</sup> Pour ces symétries on utilise la version du tenseur de Riemann avec tous les indices bas qu'on obtient en abaissant un indice sur la définition que nous avons donnée dans les rappels par multiplication par le tenseur métrique et contraction pour éliminer l'indice haut. En fait, on montre ces propriétés sur sa valeur exprimée en coordonnées localement inertielles. Dans cette version, il est évident qu'il est antisymétrique sur ses 2 premiers et 2 derniers indices, invariant par échange de la première paire avec la seconde la somme des permutations sur les 3 derniers indices est nulle, ceci fait que sur les 256 composantes il n'y a, au maximum, que 1/12 ( $n^2(n^2-1)$ ) valeurs différentes, soit 20 pour  $n = 4$ . Il peut y en avoir moins si des contraintes s'appliquent (symétries).

Où k est un facteur de proportionnalité.

Vérifions, par exemple, que cette solution satisfait bien à l'antisymétrie par permutation sur les 2 premiers indices ( $\rho \leftrightarrow \sigma$ ) du tenseur de Riemann

$$R_{\sigma\rho\mu\nu} = k. (g_{\sigma\mu} g_{\rho\nu} - g_{\sigma\nu} g_{\rho\mu}) = - R_{\rho\sigma\mu\nu} = k. (g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu} g_{\sigma\mu})$$

Vous pouvez vérifier à titre d'exercice que les autres « symétries » sont bien réalisées.

Comme cette relation est tensorielle, elle est valide dans n'importe quelles coordonnées.

### 3- Calcul de la constante de proportionnalité

Quelques rappels :

On utilise la convention d'Einstein pour la contraction des tenseurs (qui réduit leur ordre) un indice haut se contracte avec un indice bas de même nom, de dimension n, selon la loi :

$$A^\mu{}_\nu B_{\mu\rho} = C_{\nu\rho} = A^0{}_\nu B_{0\rho} + \dots + A^n{}_\nu B_{n\rho}$$

On rappelle qu'on utilise la convention d'Einstein, il faut donc sommer sur  $\rho$ .

Avec ces précisions, on doit être capable de comprendre la suite.

On peut facilement calculer la constante de proportionnalité en contractant les 2 termes de la relation ce qui se fait comme suit :

$$g^{\rho\mu} R_{\rho\sigma\mu\nu} = k. g^{\rho\mu} (g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu} g_{\sigma\mu})$$

$$g^{\rho\mu} R_{\rho\sigma\mu\nu} = k. g^{\rho\mu} (g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu} g_{\sigma\mu})$$

On va d'abord élever le premier indice puis contracter sur cet indice

$$R^\mu{}_{\sigma\mu\nu} = R_{\sigma\nu} = k. g^{\rho\mu} (g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu} g_{\sigma\mu}) = k. (n g_{\sigma\nu} - \delta^\mu{}_\nu g_{\sigma\mu}) = k. (n g_{\sigma\nu} - g_{\sigma\nu})$$

Puis pour obtenir le scalaire de Ricci on va contracter une deuxième fois

$$g^{\rho\sigma} R_{\sigma\nu} = R = k. (n-1) g^{\rho\sigma} g_{\sigma\nu} = k. (n-1)n \rightarrow k = R/[n(n-1)]$$

Le terme de gauche devient R et celui de droite n(n-1).

On obtient alors :

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R/[n(n-1)] (g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu} g_{\sigma\mu})$$

### 4 – Espaces temps à symétrie maximum<sup>3</sup>

Les espaces temps à symétrie spatiale maximum sont en fait des cas particuliers d'une situation plus générale où, par exemple, c'est seulement l'espace qui est symétrique.

Dans un certain sens, de tels univers sont des « *états de base* » de la Relativité Générale.

---

<sup>3</sup> Adapté de Carroll S. M (2004). Spacetime and Geometry. Pearson-Addison Wesley. Maximally symmetric universes p139-141 & p323-329.

Le tenseur de Riemann caractérise complètement la courbure intrinsèque de l'espace-temps, il doit donc refléter ses symétries.

Dans le cas général, ses composantes sont des fonctions de la métrique et de ses dérivées premières et secondes.

Pour un espace-temps à symétrie maximum, il se simplifie considérablement, ses composantes ne sont fonction de que la métrique elle-même. Dans une variété à  $n$  dimensions de métrique  $g_{\mu\nu}$ , il s'écrit :

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = K(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}) \quad (4.1)$$

Où  $K$  est la mesure normalisée de la courbure de Ricci

$$K = R/n(n-1) = R/12 \quad (\text{pour } n=4) \quad (4.2)$$

Et le scalaire de Ricci «  $R$  » doit être constant partout dans la variété. Comme nous pouvons toujours mettre la métrique sous sa forme canonique en un point quelconque ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ), les sortes d'espaces temps à symétrie maximum vont être caractérisés localement par la signature de la métrique et par le signe du paramètre constant  $K$ .

Nous disons, localement, pour permettre différentes solutions globales possibles, comme pour le plan et le tore.

Nous nous intéressons aux métriques de signatures  $(-+++)$ .

*Les trois cas génériques correspondent donc à  $K < 0$  (espace-temps anti De Sitter),  $K = 0$  (espace-temps de Minkowski),  $K > 0$  (espace-temps de De Sitter)*

Pour  $K = 0$  nous connaissons bien cette métrique, c'est celle de Minkowski.

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (4.3)$$

Le diagramme conforme associé est connu.

L'espace-temps à symétrie maximum correspondant à  $K > 0$ , courbure positive<sup>4</sup> est appelé l'espace « *de Sitter* ».

Considérons un espace de Minkowski à 5 dimensions de métrique

$$ds^2 = -du^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 \text{ et définissons y un (hyper)hyperboloïde}^5 \text{ donné par} \\ -u^2 + x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \alpha^2 \quad (4.4)$$

Maintenant définissons les coordonnées  $(t, \chi, \theta, \Phi)$  sur l'(hyper)hyperboloïde via

---

<sup>4</sup>Nous ne traitons pas ici de l'autre solution à symétrie maximum, celle à courbure négative constante, l'espace anti-Sitter. Notons que cet espace Anti De Sitter sert « d'espace de fond » dans certaines cosmologies branaires.

<sup>5</sup> Il conviendrait de faire la différence entre courbure intrinsèque et courbure extrinsèque. Le choix à priori de l'hypersurface « Hyperboloïde » imbriqué dans un espace Minkowskien 5D, s'appuie sans doute sur la connaissance de la courbure d'une telle hypersurface compatible avec ce qu'on recherche.

$$\begin{aligned}
u &= a.\sinh(t/a) \\
w &= a.\cosh(t/a).\cos\chi \\
x &= a.\cosh(t/a).\sin\chi.\cos\theta \\
y &= a.\cosh(t/a).\sin\chi.\sin\theta.\cos\Phi \\
z &= a.\cosh(t/a).\sin\chi.\sin\theta.\sin\Phi
\end{aligned}
\tag{4.5}$$

La métrique sur l'hyperboloïde est alors

$$ds^2 = -dt^2 + a^2\cosh^2(t/a)[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2)] \tag{6}$$

- a) La métrique est non statique. Mathematica 4, permet de vérifier qu'elle satisfait (4.1).
- b) Il n'y a pas de singularité apparente (mais un horizon des évènements<sup>6</sup>). A ce propos, remarquons que quand nous avons calculé la distance de cet horizon pour les formes (4)-(5), nous avons noté qu'elle dépendait des coordonnées temporelles de l'observateur (cette distance est maximum pour  $t = 0$  et elle  $\rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  où l'univers devient totalement causalement déconnecté).

On peut vérifier que ceci s'applique également à la forme (6). Cela peut paraître surprenant pour une solution à symétrie maximum où tous les points sont équivalents. A priori, un système de coordonnées étant arbitraire, il semblerait toujours possible d'imposer  $t = 0$  et  $\psi = 0$  pour l'observateur qu'on considère (choix des origines).

Mais remarquons que les formes (4)-(6) n'étant pas homogènes par rapport au temps, elles déterminent des classes d'observateurs et la dépendance des coordonnées doit se lire comme caractérisant la relation entre les différentes classes.

Cela est lié à la brisure de symétrie liée à l'utilisation de cette forme. Existe-t-il cependant un critère indépendant des coordonnées, de nature conforme, par exemple, lié aux géodésiques nulles, pour caractériser les hypersurfaces remarquables qui régissent la causalité ?

L'équivalence conforme entre l'univers de De Sitter et celui statique d'Einstein, n'éclaire pas ce problème comme on aurait pu l'espérer, car il n'y a pas d'horizon des évènements dans la solution statique d'Einstein.

- c) La coordonnée  $t$  correspond au temps propre.
- d) Nous reconnaissons<sup>7</sup> entre parenthèses la métrique sur une **2-sphère**  $d\Omega_2^2$  et entre crochets la métrique sur une **3-sphère**  $d\Omega_3^2$  qui sont les sections spatiales.
- e) Le scalaire de Ricci vaut  $12/a^2$  conformément à (4-2) avec  $a^2 = 1/K$ ,  $a$  étant le rayon de l'hypersphère spatiale : il est constant sur la variété (vérifié par mathematica 4).

<sup>6</sup> On ne le redémontre pas, mais c'est la même intégrale que pour la forme (2.1). Scalaire de Ricci =  $12/a^2$

<sup>7</sup> Remarque sur les notations : Par 2-sphère nous entendons la surface (à deux dimensions) d'une sphère classique, par une 3-sphère il s'agit d'une hypersphère 3D.

- f) La forme décrit une variété spatialement ouverte  $\cosh(t/a) \rightarrow \infty$  quand  $t \rightarrow \pm \infty$ .
- g) Ces coordonnées couvrent toute la variété. On peut le vérifier en étudiant le comportement des géodésiques aux limites du système de coordonnées, car si les coordonnées sont incomplètes, les géodésiques se terminent alors que le paramètre affine associé reste fini

La topologie de l'espace « de Sitter » est  $\mathbf{R} \times \mathbf{S}^3$ .

Donc la métrique de "de Sitter" décrit une **3-sphère** qui initialement rétrécit, atteint son minimum pour  $t = 0$ , et ensuite rebondit et gonfle à jamais à l'infini.

### L'univers de De Sitter et l'univers statique d'Einstein sont conformément équivalents

Il y correspond un diagramme conforme très simple, on peut en effet écrire cette métrique dans une forme conformément reliée à l'univers statique d'Einstein (un espace-temps de topologie  $\mathbf{R} \times \mathbf{S}^3$ , décrivant une 3-sphère spatiale de rayon constant dans le temps). Considérons la transformation de coordonnée de  $t$  en  $t'$  par :

$$\cosh(t/a) = 1/\cos(t') \quad (4.7)$$

La métrique (4.6) devient alors

$$ds^2 = [a^2/\cos^2(t')] ds'^2 \quad (4.8)$$

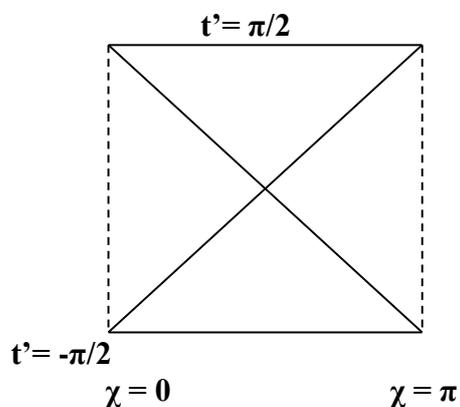
Où  $ds'^2$  représente la métrique de l'univers statique d'Einstein

$$ds'^2 = -dt'^2 + d\chi^2 + \sin^2\chi \cdot d\Omega_2^2 \quad (4.9)$$

la nouvelle coordonnée temps s'étend de

$$-\pi/2 < t' < \pi/2 \quad (4.10)$$

Ceci est représenté par le diagramme ci-dessous.



**Figure 4.1 :** Diagramme conforme de l'espace-temps « de Sitter ». Les tranches d'espace sont des *3-sphères*, donc les points du diagramme sont des *2-sphères*, sauf sur les bords droit et gauche qui représentent des points.

Le diagramme conforme de l'espace-temps « de Sitter » est simplement la représentation de la pièce de l'univers statique d'Einstein, qui y est conformément équivalent.

Il ressemble à un carré, comme la figure 4.1 le montre.

Une tranche d'espace à  $t$ 'constant représente une 3-sphère (hypersphère), les lignes interrompues à gauche et à droite sont le pôle nord et le pôle sud de cette 3-sphère.

Les lignes diagonales représentent des trajectoires de photons.

Un photon partant de l'infini du passé va aller à l'antipode de cette 3 sphère à l'infini du futur.

Si l'hypersphère n'est pas facile à se représenter, il faut se rappeler que les géodésiques lumière suivent des grands cercles de l'hypersphère, qui sont eux faciles à représenter, c'est pour cela que à l'image de ce qui se passe à la surface d'une 2-sphère pour des grands cercles un photon va aux antipodes (et il peut continuer et boucler indéfiniment dans la solution d'univers statique d'Einstein).

Par ailleurs la représentation conforme préserve le caractère des géodésiques lumières, et la causalité associée.

Gardons à l'esprit que l'espace se « termine » dans le passé et dans le futur par la « magie » de la transformation conforme, l'espace-temps de « de Sitter » s'étendant indéfiniment vers le passé et vers le futur.

Remarquons aussi que deux points peuvent avoir des cônes de lumière du futur ou du passé qui sont complètement disjoints.

Ceci est dû au fait que les sections sphériques spatiales s'étendent si rapidement que la lumière d'un point ne peut jamais rencontrer celle émise par l'autre.

Le fait que ces univers soient conformément équivalents n'est pas surprenant car ils sont tous les deux à symétrie maximum, ceci malgré leur différence de nature physique, l'univers statique d'Einstein contient de la matière, il est fini et à ce titre a toutes les qualités requises par Einstein pour satisfaire au principe de Mach, alors que l'univers de De Sitter est vide.

## 5-Application : calcul de la métrique spatiale de Robertson-Walker

### Type de Métrique associé au sous espace 3D symétrique

Si on s'intéresse aux métriques 3D à symétrie maximum  $\gamma_{ij}$ , elles obéissent à la loi:

$${}^{(3)}R_{ijkl} = k (\gamma_{ik} \gamma_{jl} - \gamma_{il} \gamma_{jk}) \quad (2)$$

où  $k$  est une constante et l'indice  ${}^{(3)}$  sur le tenseur de Riemann nous rappelle que c'est une métrique 3D (spatiale),  $\gamma_{ij}$  n'est donc pas la métrique de l'espace temps.

### Tenseur de Ricci associé au sous espace 3D

Les composantes (d'espace) du tenseur de Ricci prennent la forme très simple suivante:

$${}^{(3)}R_{jl} = 2k \cdot \gamma_{jl} \quad (3)$$

Un espace à symétrie maximale possède nécessairement une symétrie sphérique, soit

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} du^i du^j = e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\Phi^2) \quad (4)$$

Les composantes du tenseur de Ricci,  $R_{ik} = \partial_l \Gamma^l_{ik} - \partial_k \Gamma^l_{il} + \Gamma^l_{ik} \Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il} \Gamma^l_{km}$ , se réduisent à :

$${}^{(3)}R_{11} = (2/r) \partial_r \beta, \quad {}^{(3)}R_{22} = e^{-2\beta} (r \cdot \partial_r \beta - 1) + 1, \quad {}^{(3)}R_{33} = [e^{-2\beta} (r \cdot \partial_r \beta - 1) + 1] \sin^2\theta \quad (5)$$

On les pose proportionnels à la métrique en utilisant (3), et on résout pour  $\beta(r)$ :

$$\beta = -1/2 \ln(1 - k \cdot r^2) \quad (6)$$

Détaillons le résultat de (6) à partir de (3) (4) et (5)

Les coordonnées 1, 2, 3 sont respectivement  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ .

Les composantes de la métrique spatiale sont données par (4)

$$\gamma_{11} = e^{2\beta(r)} \quad \gamma_{22} = r^2 \quad \gamma_{33} = r^2 \cdot \sin^2(\theta) \quad (7)$$

Pour la composante  $\gamma_{11}$  de la métrique qui est  $r$  cela donne :

$$R_{11} = 2k \cdot e^{2\beta(r)} = (2/r) \partial_r \beta(r) \quad (8)$$

$$R_{22} = 2k \cdot r^2 = [e^{-2\beta(r)} (r \cdot \partial_r \beta(r) - 1)] + 1 \quad (9)$$

$$R_{33} = 2k \cdot r^2 \cdot \sin^2(\theta) = \{ [e^{-2\beta(r)} (r \cdot \partial_r \beta(r) - 1)] + 1 \} \sin^2(\theta) \quad (10)$$

On voit que les 2 dernières équations sont identiques.

Vérifions que la solution donnée par (6) satisfait bien ces équations.

$$R_{11} = 2k \cdot e^{2(-1/2 \ln(1 - kr^2))} = 2k \cdot e^{-\ln(1 - kr^2)} = 2k/(1 - kr^2) = (2/r) \partial_r (-1/2 \ln(1 - kr^2)) \quad (11)$$

$$R_{22} = 2k \cdot r^2 = [e^{-2(-1/2 \ln(1 - kr^2))} r \cdot \partial_r (-1/2 \ln(1 - kr^2)) - 1] + 1 = [r(1 - kr^2)] \cdot [\partial_r (-1/2 \ln(1 - kr^2)) - 1] + 1 \quad (12)$$

En utilisant la formule  $\ln(u)' = (u'/u)$ , nous obtenons

$$\partial_r \beta(r) = \partial_r (-1/2 \ln(1 - kr^2)) = -1/2 \cdot (-2kr)/(1 - kr^2) = kr/(1 - kr^2) \quad (13)$$

Vérifions que la solution proposée est correcte en substituant ce résultat dans (11) :

$$2k/(1-kr^2) = (2/r)kr/(1-kr^2) = 2k/(1-kr^2) \quad (14)$$

C'est correct. Vérifions pour l'équation (12).

$$2k.r^2 = [(1-kr^2)].[kr^2/(1-kr^2) - 1] + 1 = [(1-kr^2)].[(kr^2-1 + kr^2)/(1-kr^2)] + 1 = (kr^2 - 1 + kr^2) + 1 = 2kr^2 \quad (15)$$

Ce qui est bien vérifié.